

Proyecto Fin de Máster

Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Un modelo probabilístico para el cálculo estructural de sistemas mecánicos y la aplicación a la optimización de sistemas

Autor: Jacobo Ayensa Jiménez

Tutor: José Antonio Sanz Herrera

Dep. Ingeniería Mecánica y de Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016



Proyecto Fin de Máster
Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Un modelo probabilístico para el cálculo estructural de sistemas mecánicos y la aplicación a la optimización de sistemas

Autor:

Jacobo Ayensa Jiménez

Tutor:

José Antonio Sanz Herrera

Doctor en Ingeniería industrial, Abengoa Research

Dep. Ingeniería Mecánica y de Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Proyecto Fin de Máster: Un modelo probabilístico para el cálculo estructural de sistemas mecánicos y la aplicación a la optimización de sistemas

Autor: Jacobo Ayensa Jiménez
Tutor: José Antonio Sanz Herrera

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



Dedicado a María

Agradecimientos

Este trabajo es el fruto de un año de trabajo, a caballo entre el marco industrial y el marco académico. Se trata de la punta del iceberg de una metodología que se pretende implantar en la empresa ABENGOA de cara a establecer un marco nuevo, más eficaz, para el diseño de sistemas estructurales enfocados a la producción.

Por ello, este trabajo tiene multitud de ideas, métodos, directrices... pertenecientes a todo el grupo que codo con codo hemos trabajado en el proyecto RELIABLE. En particular, me gustaría agradecer a José Antonio Sanz Herrera, principal orientador para este trabajo, por su tiempo (que sé que le es escaso), ánimo y consejos; por su mentalidad industrial, que a pesar de complicar a menudo los rasgos académicos, permite que el ingeniero nunca deje de ser precisamente eso, un ingeniero. Me gustaría agradecer también a Alejandro Tapia Córdoba, por su ingenio y su talento, porque trabajar con él en el proyecto ha sido un privilegio. Agradecerle también por la infinidad de veces que me ha echado una mano con el formato y algunas figuras de la memoria.

La primera parte del trabajo es el resultado de una estrecha colaboración con el grupo de Dinámica Ambiental de la Universidad de Granada, a cargo del catedrático Miguel A. Losada Rodríguez. Fue durante un corto periodo de aprendizaje en su grupo donde descubrí la teoría del régimen extremal, en ocasiones ausente en los cursos básicos de estadística, aunque tenga un paralelismo directo con la teoría del régimen central, habitual en estos cursos introductorios y donde comprendí la flexibilidad de los modelos estadísticos mixtos, especialmente para capturar la variabilidad de variables ambientales. Tanto el marco teórico de los modelos mixtos como la implementación numérica básica, es esencialmente suya. Agradecer, en particular, a los doctorandos Pedro R. Folgueras, Lourdes Jalón y Francisco Bello por su acogida, social e intelectual, en el grupo.

La segunda parte del trabajo es personal, tanto en ideas como en el desarrollo de la implementación de las mismas. No obstante, el *solver* del método de la rigidez está basado, en tipo y estructura de datos, en el suministrado a los alumnos por los profesores Jose Ángel Pérez y Luís Rodríguez de Tembleque, siendo algunas funciones, en particular, idénticas. Es por ello que no cabe otra cosa que citar a los autores en agradecimiento.

La tercera parte es también muy personal, pero es oportuno nombrar a Agustín Sánchez de la Nieta por sus consejos y referencias a propósito de la teoría del riesgo y estudio de mercados.

Finalmente, me gustaría agradecer a todos los que han compartido conmigo este último año en ABENGOA. Principalmente, a mis compañeros doctorandos del área de simulación, Enrique J. Sánchez Quintero y Emilio Franco González, a Elena Gómez Ortiz, que me echó una mano con las simulaciones de XFlow y al resto de doctorandos por resolverme, en momentos puntuales, las dudas interdisciplinares que podían surgirme sobre la tecnología PV, el mercado eléctrico o el cálculo de cargas de viento.

Jacobo Ayensa Jiménez
Abengoa Research

Sevilla, 2016

Resumen

La necesidad imperiosa por situar la ingeniería en un contexto de escasez obliga indirectamente cada vez más al ingeniero a plantear el diseño ya análisis de sistemas en un marco de incertidumbre. En este documento se plantea una metodología racional para el estudio de sistemas mecánicos sometidos a condicionantes ambientales en un contexto probabilístico, orientado claramente a la toma de decisiones técnicas y estratégicas. Dicha metodología es flexible como para capturar la riqueza de los sistemas mecánicos evolutivos (cuyas propiedades cambian con las cargas a las que se ven sometidos) y logra situar a los sistemas considerados en un prisma que los convierte a todos los efectos en productos financieros.

Abstract

The imperative need for placing engineering in a context of scarcity forces indirectly the engineer to face the design and analysis of systems in an uncertainty framework. This document provides a rational approach to the study of mechanical systems under environmental conditions in a probabilistic context, clearly aimed to technical and strategic decision - making. This methodology is flexible to capture the richness of evolutionary mechanical systems (whose properties change with the loads to which they are subjected) and manages to put the considered systems in a prism so as they turn into financial products.

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<i>Notación</i>	XIII
Introducción	1
I. Caracterización estadística de agentes externos	7
1. Marco general del problema	9
1.1. El problema ingenieril desde el punto de vista global	9
1.2. La aleatoriedad en la ingeniería	15
1.3. Modelo de cálculo para los agentes forzadores	20
2. Caracterización de la velocidad del viento	29
2.1. Distribuciones mixtas	29
2.2. Modelos para el régimen central	30
2.3. Modelos para el régimen extremal	33
2.4. Un modelo mixto para la caracterización de la velocidad del viento	35
3. Caracterización del coeficiente de fuerzas	47
3.1. Un modelo para la caracterización del coeficiente de fuerzas	47
3.2. Simulación y validación mediante <i>bootstrapping</i> paramétrico	70
3.3. Aplicación a la reducción de coste computacional en cálculos de cargas de viento	79
3.4. Conclusiones	83
4. Análisis de la incertidumbre en el modelo V-C	85
4.1. Introducción	85
4.2. Cálculos teóricos	86
4.3. Estudio teórico de la variabilidad del modelo	88
4.4. Simulaciones con el modelo propuesto	89
4.5. Conclusión	107
II. Análisis estructural	109
5. Cálculo estructural y determinación de solicitaciones	111
5.1. Cálculo estructural	111
5.2. Cálculo de solicitaciones	116

6. Fallo estructural: ecuaciones de verificación	119
6.1. Forma general de las ecuaciones de verificación	119
6.2. Modos de fallo estructurales de una estructura de barras articuladas	124
 III. Aplicación al análisis de fiabilidad	 127
7. Diseño y análisis económico	129
7.1. Planteamiento general del problema	130
7.2. Resolución del problema	136
7.3. Algunos comentarios sobre estrategias de diseño, gestión y financiación	139
 8. Métodos matemáticos para problemas probabilísticos	 145
8.1. Métodos probabilísticos para el análisis de fiabilidad	146
8.2. Programación estocástica	150
8.3. El método de Montecarlo aplicado al cálculo de probabilidades	153
 9. Optimización de una estructura soporte de paneles fotovoltaicos	 161
9.1. Descripción del caso de análisis	161
9.2. Problema de optimización	163
9.3. Problema de análisis	167
9.4. Valores de los parámetros adoptados	171
9.5. Resultados	172
9.6. Principales conclusiones	186
 Conclusiones	 189
 Apéndice A. Algunos modelos y resultados estadísticos	 193
A.1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias	193
A.2. Nociones básicas sobre procesos estocásticos	204
 <i>Índice de Figuras</i>	 207
<i>Índice de Tablas</i>	209
<i>Bibliografía</i>	211

Índice

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<i>Notación</i>	XIII
Introducción	1
I. Caracterización estadística de agentes externos	7
1. Marco general del problema	9
1.1. El problema ingenieril desde el punto de vista global	9
1.1.1. Variables de entrada	10
1.1.2. Variables de salida	11
1.1.3. Problemas clásicos en ingeniería	13
1.2. La aleatoriedad en la ingeniería	15
1.2.1. La aleatoriedad en los modelos físicos	16
La aleatoriedad como modelo estadístico basado en aspectos físicos	16
La aleatoriedad como modelo estadístico de incertidumbre	17
Combinación de ambos métodos	18
1.2.2. Diseño y optimización de sistemas en condiciones de incertidumbre	19
1.2.3. Análisis de sistemas en condiciones de incertidumbre	20
1.3. Modelo de cálculo para los agentes forzadores	20
1.3.1. Presentación del sistema	21
Parámetros	21
Variables ambientales	21
1.3.2. Hipótesis de partida para el análisis	24
1.3.3. Modelo probabilístico	27
2. Caracterización de la velocidad del viento	29
2.1. Distribuciones mixtas	29
2.2. Modelos para el régimen central	30
2.2.1. Fundamento teórico	30
Consideraciones físicas	31
Consideraciones geométricas	31
Distribución de la velocidad del viento	31
2.2.2. Reseña bibliográfica	32
2.3. Modelos para el régimen extremal	33
2.3.1. Fundamento teórico	33
2.3.2. Aplicación: el método de los picos sobre umbral	34
2.3.3. Reseña bibliográfica	35
2.4. Un modelo mixto para la caracterización de la velocidad del viento	35

2.4.1.	Modelo	35
2.4.2.	Método de ajuste	38
2.4.3.	Aplicación a una serie de datos meteorológicos	38
	Régimen medio	38
	Régimen extremal	42
	Conclusiones	45
3.	Caracterización del coeficiente de fuerzas	47
3.1.	Un modelo para la caracterización del coeficiente de fuerzas	47
3.1.1.	Análisis exploratorio	48
	Datos utilizados	48
	Carácter del proceso	48
	Análisis estadístico univariado	49
	Análisis multivariado	49
	Análisis espectral	51
3.1.2.	Modelo	59
3.1.3.	Método de ajuste	59
	Ajuste estadístico	59
	Ajuste de la dependencia temporal	60
3.1.4.	Comprobación del ajuste	60
3.2.	Simulación y validación mediante <i>bootstrapping</i> paramétrico	70
3.2.1.	Estudio estadístico	70
	Análisis univariado	71
	Análisis bivariado	71
3.2.2.	Estudio espectral	71
3.3.	Aplicación a la reducción de coste computacional en cálculos de cargas de viento	79
3.3.1.	Planteamiento del problema	79
3.3.2.	Resultados	80
3.3.3.	Interpretación	82
3.4.	Conclusiones	83
4.	Análisis de la incertidumbre en el modelo V-C	85
4.1.	Introducción	85
4.2.	Cálculos teóricos	86
4.2.1.	Expresión lineal	86
4.2.2.	Expresión exacta para variables independientes	87
	Expresión de la esperanza	87
	Expresión de la varianza	87
	Expresión de la correlación lineal	87
	Caracterización de los procesos F_i	88
4.3.	Estudio teórico de la variabilidad del modelo	88
4.3.1.	Variable V determinista	88
4.3.2.	Variable C_i determinista	89
4.3.3.	Caso general	89
4.4.	Simulaciones con el modelo propuesto	89
4.4.1.	Escenarios planteados	90
4.4.2.	Análisis estadístico univariado	92
	Estadísticos básicos	92
	Comparativa de las distribuciones	94
4.4.3.	Análisis multivariado	97
4.4.4.	Análisis espectral	101
4.4.5.	Valoraciones	104
	Estadísticos básicos	104
4.4.6.	Análisis multivariado	106
4.5.	Conclusión	107

II. Análisis estructural	109
5. Cálculo estructural y determinación de solicitaciones	111
5.1. Cálculo estructural	111
5.1.1. Hipótesis básicas	113
5.1.2. Modificaciones de la matriz de rigidez	114
5.2. Cálculo de solicitaciones	116
6. Fallo estructural: ecuaciones de verificación	119
6.1. Forma general de las ecuaciones de verificación	119
6.1.1. Concepto de ecuación de verificación	119
6.1.2. Alcance y problemática	121
6.1.3. Ejemplos de ecuaciones de verificación en ingeniería mecánica	122
6.2. Modos de fallo estructurales de una estructura de barras articuladas	124
6.2.1. Fallo por agotamiento elástico	125
6.2.2. Fallo por pandeo de barras	125
III. Aplicación al análisis de fiabilidad	127
7. Diseño y análisis económico	129
7.1. Planteamiento general del problema	130
7.1.1. Formulación general del problema de optimización	130
Variables de diseño	131
Función objetivo	132
Restricciones	133
7.1.2. Del problema determinista al problema probabilista	134
El problema de optimización estocástica con restricciones	134
El espíritu del problema	135
7.2. Resolución del problema	136
7.2.1. Fase de diseño	137
7.2.2. Fase de análisis	137
Análisis del beneficio	137
Análisis del rendimiento	138
Análisis económicos, coberturas y financiación	139
7.3. Algunos comentarios sobre estrategias de diseño, gestión y financiación	139
7.3.1. Estrategias de diseño	140
Costes iniciales y de mantenimiento	140
Estructuras hiperestáticas	140
7.3.2. Estrategias de gestión y operación	141
Tareas de mantenimiento	141
Operación y parada	141
Realimentación	142
7.3.3. Estrategias de financiación y otros aspectos económicos	142
Retorno de la inversión	142
Seguros	143
Cartera de productos y diseño de coberturas internas	143
8. Métodos matemáticos para problemas probabilísticos	145
8.1. Métodos probabilísticos para el análisis de fiabilidad	146
8.1.1. Métodos de nivel I	146
Método de coeficientes de seguridad global	146
Método de los coeficientes parciales	147
8.1.2. Métodos de nivel II	148
8.1.3. Métodos de nivel III	149
8.2. Programación estocástica	150
8.2.1. Problema equivalente certero	150

8.2.2.	Análisis de escenarios	152
8.3.	El método de Montecarlo aplicado al cálculo de probabilidades	153
8.3.1.	Error en el Método de Montecarlo. Tamaño de la muestra	153
	Cálculo de probabilidades	154
	Cálculo de parámetros	155
	<i>Jackknife.</i>	156
	<i>Bootstrap.</i>	157
8.3.2.	Algoritmo de resolución del método de optimización	158
9.	Optimización de una estructura soporte de paneles fotovoltaicos	161
9.1.	Descripción del caso de análisis	161
9.1.1.	Descripción del sistema y parámetros	161
9.1.2.	Variables ambientales	163
9.2.	Problema de optimización	163
9.2.1.	Objetivos y motivación	163
9.2.2.	Catálogo de variables de diseño	164
9.2.3.	Función objetivo y restricciones	164
	Función objetivo	164
	Restricciones	165
9.2.4.	Problema de optimización estocástica	165
	Variables aleatorias del problema	165
	El espíritu del problema y los niveles de rendimiento	166
	El problema de optimización	166
	Simplificaciones computacionales	166
9.3.	Problema de análisis	167
9.3.1.	Objetivos y motivación	167
9.3.2.	Elementos de análisis	168
	Análisis del beneficio	168
	Análisis del rendimiento	168
9.3.3.	Análisis de rentabilidad y financiación	169
9.4.	Valores de los parámetros adoptados	171
9.5.	Resultados	172
9.5.1.	Diseño del colector	172
9.5.2.	Análisis del sistema	175
	Primer acercamiento	175
	Beneficio	177
	Rendimiento	179
	Rentabilidad y financiación	183
9.6.	Principales conclusiones	186
	Conclusiones	189
	Apéndice A. Algunos modelos y resultados estadísticos	193
A.1.	Espacios de probabilidad y variables aleatorias	193
A.1.1.	Espacios de probabilidad	193
	Nociones preliminares	193
	Probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$	194
	Probabilidad condicionada	195
A.1.2.	Variables y vectores aleatorios	196
	Variables aleatorias	196
	Independencia	197
	Cuantiles	198
A.1.3.	Esperanza matemática	198
	Nociones preliminares	198
	El operador esperanza	199
	Desigualdades y espacios L^p	200

Momentos	201
Covarianza y correlación	202
A.1.4. Función característica y funciones generatrices	203
Función característica	203
Función generatriz de momentos	204
A.2. Nociones básicas sobre procesos estocásticos	204
A.2.1. Definiciones básicas	204
Generalidades	204
Procesos estocásticos estacionarios	205
Procesos estocásticos estacionarios y ergódicos	206
<i>Índice de Figuras</i>	207
<i>Índice de Tablas</i>	209
<i>Bibliografía</i>	211

Notación

\mathbb{R}	Cuerpo de los números reales
\mathbb{C}	Cuerpo de los números complejos
$\ \mathbf{v}\ $	Norma del vector \mathbf{v}
$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$	Producto escalar de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w}
$\det(\mathbf{A})$	Determinante de la matriz (cuadrada) \mathbf{A}
\mathbf{A}^\top	Transpuesto de \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Inversa de la matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Matriz pseudoinversa de la matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Transpuesto y conjugado de \mathbf{A}
\mathbf{A}^*	Conjugado
x°	Notación de grado, x grados.
$\Pr(A)$	Probabilidad del suceso A
σ_X^2	Varianza de la variable aleatoria X
$\sim f_X(x)$	Distribuido siguiendo la función densidad de probabilidad $f_X(x)$
$\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$	Distribución gaussiana para la variable aleatoria X , de media m_X y varianza σ_X^2
\mathbf{I}_n	Matriz identidad de dimensión n
MSE	Minimum square error
:	Tal que
$\stackrel{\text{def}}{=}$	Igual por definición
\leq	Menor o igual
\geq	Mayor o igual
\Leftrightarrow	Si y sólo si
Δ	Incremento
TM	Trade Mark
$\mathbb{E}[X]$	Esperanza matemática de X
\mathbf{C}_x	Matriz de covarianza de \mathbf{x}
\mathbf{R}_x	Matriz de correlación de \mathbf{x}
σ_x^2	Varianza de x

Introducción

Je sais enfin ce qui distingue l'homme de la bête : ce sont les ennuis d'argent.

JULES RENARD, 1864 - 1910

Introducción al problema en cuestión

La ingeniería ha sido un aspecto de la vida desde el inicio de la existencia humana. Las prácticas más tempranas de la ingeniería civil podrían haber comenzado entre el 4000 y el 2000 a. C. en el Antiguo Egipto y Mesopotamia cuando los humanos comenzaron a abandonar la existencia nómada, creando la necesidad de un cobijo. Durante este tiempo el transporte empezó a incrementar su importancia, lo que llevó al desarrollo de la rueda y de la navegación. Son las primeras muestras de lo que hoy conocemos como ingeniería civil. A mediados del siglo XIX, con el advenimiento de la revolución industrial, la ingeniería adopta un cariz mayor, incorporando nuevas áreas del conocimiento, la ciencia y la técnica enfocadas al diseño de otro tipo de sistemas productivos. Ya en el siglo XX, con la proliferación de las telecomunicaciones, la electrónica y las computadoras, se completa todo el espectro de lo que hoy en día conocemos como ingeniería.

A la necesidad imperiosa que posee el género humano de productos de ingeniería (infraestructuras, edificaciones, plantas de energía, telecomunicaciones y satélites, redes informáticas) responde la exigencia de métodos racionales y rigurosos para su cálculo y diseño. Con el paso de los años, los modelos, esencialmente matemáticos, utilizados para estas tareas han aumentado en complejidad y detalle de forma exponencial. En respuesta a este fenómeno, con una voluntad técnica unificadora y de síntesis, organismos gubernamentales y no gubernamentales, del ámbito científico y técnico, académico e industrial, han ido proponiendo y publicando pautas, directrices u orientaciones para la práctica ingenieril. Algunas de ellas, son adoptadas con carácter normativo por la ley vigente de algunos estados.

Sucede no obstante, en algunos sectores de la industria, por ejemplo especialmente en el ámbito de las energías renovables, que la ingeniería, se quiera o no, está muy vinculada al mercado, teniendo por tanto una marcada faceta económica que nada tiene que ver con aspectos científicos o técnicos. En palabras de Lionel Robbins, economista británico, la economía es *la forma o medios de satisfacer las necesidades humanas mediante los recursos disponibles, que siempre son limitados*. La ingeniería clásica está basada en modelos matemáticos (teóricos o fenomenológicos) que provienen de una abstracción que no contempla en ningún caso una escasez de recursos.

Considerar la escasez como un condicionante fundamental en los problemas de ingeniería tiene consecuencias dramáticas, puesto que, la mayoría de las veces, exige que se aplique un modelo abstracto en unas condiciones límite, frontera, que es donde, precisamente, el modelo tiene más incertidumbre, tanto en su fundamento teórico como en la aplicación del mismo. **El ingeniero moderno, en un contexto de escasez, está obligado, por lo tanto, a adoptar una postura activa frente a la incertidumbre y el riesgo.** Una misma expresión matemática, $x \geq C$ tiene una lectura completamente diferente en un marco de escasez. No

consiste únicamente en que x sea mayor que C , sino en que x sea mayor que C , siendo a su vez lo más pequeña posible. Evidentemente, este condicionante entraña un riesgo, puesto que si se asume que en realidad C tiene cierta fluctuación, esta condición tiene que ser interpretada consecuentemente.

Normalmente, el riesgo es tratado en la ingeniería clásica mediante atajos y artificios operativos, en ocasiones de naturaleza *oscura* o directamente *convenida* y en general faltos de un fundamento conceptual. El único marco racional, verdaderamente riguroso y rico en herramientas matemáticas es la teoría de la probabilidad y la estadística, que es transversal a los dos ámbitos en cuestión que vertebran el problema: el ámbito científico - técnico, ya que la incertidumbre es inherente al mundo que nos rodea y se plasma de forma natural en los modelos matemáticos que describen la ciencia del problema y el ámbito económico, ya que cualquier paradigma económico vinculado a un mercado está sujeto a volatilidad.

En la sección siguiente, se presentará un breve "estado del arte" del tratamiento del riesgo en ingeniería civil y estructural, que es el marco en el que se sitúa este documento. Posteriormente, se plantearán los objetivos específicos del estudio, y se detallará la metodología que se pondrá en marcha a lo largo del mismo.

Estado del arte

Métodos deterministas

En el ámbito de la ingeniería civil, lo más habitual es usar modelos que no incorporan aspectos probabilistas, pero garantizan la seguridad mediante el uso de **coeficientes de seguridad**. Si una determinada *acción* A (sobre la que el ingeniero no tiene control) debe ser no mayor que una *capacidad* del sistema R (que es un parámetro de diseño), es decir, $A \leq R$, se suelen considerar unos coeficientes de seguridad, tanto para las acciones como para las capacidades, $c_A > 1$ y $c_R > 1$ de forma que se cumple $c_A A \leq R/c_R$. Una vez establecida esta relación, en un marco con condicionantes económicos, es posible que el coste del recurso vinculado a la capacidad R sea mayor cuanto mayor sea el valor de R . En este contexto, el valor de diseño adoptado será, naturalmente $R^* = c_A c_R A$.

Este método, sencillo e intuitivo, sigue usándose con mucha regularidad alrededor del mundo, para infinidad de situaciones: cálculo de cimentaciones y geotecnia, cálculo de instalaciones eléctricas, grandes infraestructuras hidráulicas (presas)... No obstante, presenta grandes inconvenientes:

- No existe un criterio universal para la elección de los coeficientes de seguridad, más allá de normas habituales de buena práctica o pura experiencia adquirida a lo largo de los años (y los desastres).
- Por esta misma razón, los coeficientes de seguridad que aparecen en directrices y normativas pretenden tener un carácter universal que deslocaliza totalmente el problema, en el espacio y el tiempo. De forma coloquial pero intuitiva: no tienen en cuenta las *condiciones de contorno*.
- En consecuencia, el valor que se adopte para dichos coeficientes podrá provocar, en algunos casos, el fallo del sistema (aunque generalmente se toman suficientemente altos para que esto no ocurra) y en la mayoría de ocasiones, un derroche innecesario de recursos.

Métodos semi-probabilísticos

En aras de solucionar este problema, las normativas actuales de ingeniería civil (como la de acero estructural[40] y la de hormigón estructural [38]) proponen en algunos casos una metodología algo más fina, que trata de recoger algunas de las características de la incertidumbre del sistema. Son los llamados comunmente *métodos semi-probabilísticos*. En este caso, se pretende desglosar el valor de la acción A en una combinación lineal de **acciones compatibles**, algunas favorables y otras desfavorables, $A = \sum_i \Psi_i A_i$, donde Ψ_i son unos coeficientes de combinación que reflejan la compatibilidad de las acciones, es decir, si éstas pueden producirse simultáneamente (o con qué frecuencia esto sucede). Por otra parte, cada una de las acciones, considerada individualmente, así como el valor de la capacidad del sistema, R , tiene una variabilidad intrínseca que puede ser caracterizada para cada variable de forma individual, tanto de acciones A_i como de capacidad R . Dicha variabilidad se considera mediante dos artificios matemáticos sencillos:

1. Por un lado, el **valor característico** de la acción, denotado mediante el subíndice k , $A_{i,k}$ viene definido en términos de una interpretación frecuentista. Habitualmente, en el caso de las cargas se toma el valor máximo que ésta puede llegar a alcanzar, mientras que en el caso de las capacidades, suele estar asociado a una frecuencia de incidencia menos límite, por ejemplo, el 5 % ó 1 %. Esto ya introduce en cierta medida la variabilidad de las variables que intervienen en el problema.
2. Para que se puedan considerar otros aspectos del modelo, como que algunas acciones pueden ser favorables o la frecuencia de aparición de las mismas, e incluso la propia incertidumbre del modelo en sí, no se toman los valores $A_{i,k}$ y R_k , sino unos **valores de cálculo**, denotados mediante el subíndice d , $A_{i,d} = c_{A,i} A_{i,k}$ y $R_d = R_k / c_R$ donde $c_{A,i}$ y c_R son coeficientes de mayoración/ minoración que ya no pretenden capturar la variabilidad de las variables, sino otro tipo de incertidumbres vinculadas a la casuística presente en el diseño.

Este método, es hoy por hoy el método más utilizado en el ámbito de la ingeniería civil y estructural: cálculo de estructuras de acero y hormigón, obras marítimas e hidráulicas, diseño de infraestructuras y algunos sistemas productivos. Aunque, como se ha justificado, el planteamiento pretende ir más allá que en el método determinista, siguen existiendo problemas:

- Al igual que en el método anterior, los coeficientes no son universales. Si bien el mayor número de coeficientes (coeficientes de combinación y coeficientes de mayoración o minoración) otorga más flexibilidad al ingeniero, en la práctica, estos coeficientes aparecen en las normativas de forma tabulada para un número limitado de escenarios posibles, por lo que esa flexibilidad no es tal, y el valor de los coeficientes no es particular para cada problema, como cabría esperar.
- La descomposición aditiva de la acción lleva inherente el concepto de combinación lineal. Como es sabido, hoy en día la mayoría de modelos de cálculo con los que se trabaja son no lineales. El método de los coeficientes parciales es muy limitado en este sentido.
- Aunque este método puede aportar más luz en la etapa de diseño, es definitivo y no permite un análisis del sistema a posteriori. Aunque se haya considerado, de forma desagregada, la incertidumbre de cada una de las variables, el cálculo se resuelve mediante técnicas puramente deterministas, lo que significa que si se desea analizar el sistema en términos de eficiencia o económicos, no se posee ningún tipo de conocimiento sobre aspectos de riesgo, que sólo son abarcables en un marco puramente probabilista.

Hoy en día, conocer, controlar y, si procede, cubrir el riesgo está convirtiéndose cada vez más en un nuevo frente trabajo para el ingeniero, en todas las fases del estudio de sistemas, especialmente como parte de proyectos de inversión.

Métodos probabilísticos

Existen muy pocos trabajos que se dedican a estudiar los sistemas estructurales complejos desde el punto de vista totalmente probabilístico. La razón principal es que, para modelos complejos (ecuaciones no lineales, funciones definidas implícitamente o numericamente, sistemas con memoria, gran cantidad de variables...) el cálculo explícito de probabilidades requiere de la integración en espacios multidimensionales de funciones que, en la mayoría de las ocasiones, son además desconocidas o conocidas parcialmente. Aun con el conocimiento de la distribución conjunta de las variables aleatorias que intervienen en el problema (lo que en este texto se conocerá como variables de entrada ambientales), el cálculo de probabilidades debe hacerse sobre variables transformadas. La complejidad del cálculo de estas probabilidades, estriba principalmente en las causas siguientes:

- Las funciones de densidad conjunta de las variables que intervienen en el cálculo de probabilidades o parámetros no se conocen directamente, ya que las variables de salida son dependientes de las de entrada de forma compleja o desconocida en mayor o menor medida. La relación causa - efecto en muchas ocasiones se determina mediante simulación numérica o modelos fenomenológicos tipo caja negra.
- Al ser esta relación compleja, es habitual que las variables de salida, cuyo conocimiento se requiere para los cálculos que se pretenden realizar, sean dependientes entre sí, dificultando muchísimo el estudio, especialmente desde el punto de vista computacional, puesto que se si se trata de M variables de salida y el cálculo de probabilidades (por el método numérico que sea) tiene para cada una de ellas un coste computacional de orden N , el coste suponiéndolas independientes es $M \times N$, mientras que el coste sin esta suposición es de N^M .

Por ello, suele ser habitual en estas situaciones postular en el modelo ciertas relaciones entre variables: independencia o dependencia lineal. Así, el sistema se descompone, por pura conveniencia, en un sistema de elementos o subsistemas en serie y en paralelo, cuyas probabilidades de fallos conjuntas se sumen conocidas o calculable suponiendo la independencia de ciertas variables. Así, la probabilidad de fallo total se estima utilizando las reglas fundamentales del álgebra de probabilidades: $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$. Cada uno de estos sucesos posibles son los átomos del nuevo espacio de probabilidad.

En cualquier caso, cualquiera de estas metodologías está basada en hipótesis que pueden ser una cuestión de conveniencia o de años de experiencia, pero para cada sistema individual, esta experiencia puede llegar después de años. El análisis de sistemas mecánicos mediante una metodología probabilística basada únicamente en la física inherente al problema está aún por desarrollar.

Objetivos

Los objetivos de este estudio son:

1. Establecer una metodología general para el análisis de **sistemas mecánicos** sometidos al **agente ambiental viento** en un contexto económico. Para ello, el trabajo se realizará en tres fases:
 - a) Definir e implementar un **modelo probabilístico** adecuado para caracterizar las cargas estructurales, en un marco de incertidumbre, supuesto que éstas vienen todas condicionadas por un mismo agente ambiental: el viento. Dicho modelo, tiene que ser capaz de capturar el carácter multiescala del fenómeno, puesto que las fluctuaciones de las cargas se deben por un lado a fenómenos de mesoescala meteorológica (variaciones de la velocidad media del viento) así como a fenómenos de turbulencia (variaciones de fuerzas instantáneas sobre los cuerpos romos que forman la estructura).
 - b) Definir e implementar un **modelo estructural** mecánico que sea capaz de capturar, en un horizonte temporal de planificación, todos los posibles fallos estructurales que puedan producirse, así como la eventual modificación de sus propiedades mecánicas cuando dichos fallos se produzcan. Este modelo debe ser por lo tanto un modelo con memoria que permita la monitorización de cualquiera de las variables del sistema a lo largo del tiempo, y que pueda incluir fallos estructurales de naturaleza estática (por ejemplo plastificación) y dinámica (por ejemplo fatiga).
 - c) Definir un marco general para el **estudio de sistemas mecánicos en un contexto de incertidumbre**, mediante técnicas numéricas y algoritmos adecuados, orientado a la toma de decisiones.
2. Ilustrar todo el proceso mediante la **optimización y el análisis** de un sistema mecánico estructural. Se trabajará con una estructura soporte de paneles fotovoltaicos, para la que se desea calcular el valor de algunas variables de diseño, de forma que se maximice el beneficio sin que dejen de cumplirse algunas condiciones sobre su rendimiento. Además, se estudiarán posteriormente las prestaciones (técnicas, económicas, financieras) del sistema en condiciones de incertidumbre en el punto de óptimo funcionamiento.

Metodología

Para llevar a cabo los objetivos planteados, se han utilizado herramientas matemáticas diversas pertenecientes a la rama de la teoría de la probabilidad y la estadística, y de la ingeniería mecánica. A continuación se resumen, a grandes rasgos, las técnicas y métodos empleados a lo largo del documento:

- **Análisis de los agentes:** Se han estudiado los agentes que actúan sobre el sistema utilizando un marco probabilístico. Para ello, es necesario disponer de modelos de distribuciones paramétricos adecuados y técnicas de inferencia solventes:
 - Para el ajuste de la velocidad del viento se utiliza un **modelo paramétrico mixto** que ajusta el régimen central y el régimen extremal simultáneamente. Para el régimen central se considera la familia Weibull y para el régimen extremal la familia generalizada de Pareto. Ambas asunciones tienen solidez teórica y han sido verificadas en numerosas ocasiones empíricamente.
 - Para el ajuste de los coeficientes de fuerzas, se utiliza un **modelo multivariable**, en el que cada coeficiente se ajusta con una distribución de la familia Weibull desplazada y se utiliza

el **coeficiente de correlación lineal** para capturar la dependencia. La validez del modelo se comprueba mediante *bootstrapping* paramétrico.

- La dependencia temporal de las variables se evalúa utilizando un **modelo vectorial autorregresivo (VAR)**.
- **Análisis mecánico:** Para el análisis mecánico, la metodología seguida se basa esencialmente en tres pilares:
 - El cálculo estructural se realiza mediante el **método de los elementos finitos**. Para el caso de estructuras de barras, este método ya era conocido anteriormente como **método de la rigidez**.
 - El fallo estructural se detecta mediante las **ecuaciones de fallo de la ingeniería mecánica**. Estas pueden pertenecer al ámbito de la plasticidad, la teoría de la fractura y la fatiga... Todas responden a la misma naturaleza: una solicitación se compara respecto a un umbral de fallo.
 - La evolución de la estructura, y por lo tanto su historia, se calcula mediante una **detección de los mecanismos implicados** en los modos de fallo. Dicha detección se hace mediante un análisis del núcleo de la matriz de rigidez una vez eliminados los elementos dañados y el cálculo de las consecuencias del mismo. La identificación sistemática y automática de los modos de fallo permite tener un conocimiento total de la evolución del sistema estructural y cualquier aspecto ligado a su seguimiento, mantenimiento o reparación.
- **Análisis económico del sistema y cuantificación y optimización de aspectos funcionales:** Como el sistema se estudia en un marco probabilístico, se acude aquí a la teoría del riesgo y la programación estocástica.
 - El diseño del sistema se realiza mediante la optimización estocástica de un **indicador del riesgo** utilizando un **análisis de escenarios**, bajo ciertas restricciones complementarias.
 - El análisis del rendimiento del sistema en su punto de óptimo funcionamiento se realiza también mediante **análisis de escenarios**. Además, los indicadores estadísticos elegidos para el análisis se tratan mediante *bootstrapping* no paramétrico.

Estructura del documento

El documento se ha estructurado de acuerdo con los tres puntos del apartado metodológico.

En la primera parte del documento, la atención se centra en las variables de entrada. En el Capítulo 1 se introduce el marco del problema, se define la terminología que se usará a lo largo del texto y se presenta el problema que se resolverá, así como se explicita el método de cálculo de las fuerzas sobre la estructura a partir de la velocidades del viento. Posteriormente en el Capítulo 2 y el Capítulo 3, se presenta y se justifica el modelo probabilístico de dos escalas temporales utilizado para caracterizar la variabilidad de las variables de entrada. Finalmente, en el Capítulo 4 se analiza el modelo en su conjunto, haciendo énfasis en la cuantificación y la propagación de la incertidumbre.

Seguidamente, el interés se localiza sobre el sistema estructural en sí. En el Capítulo 5 se describen las hipótesis del sistema y se definen los métodos de resolución, que tengan en consideración el hecho de que se van a considerar estructuras evolutivas o dependientes de su historia. En el Capítulo 6 se realiza una taxonomía de los fallos estructurales que pueden analizarse gracias al método presentado en el capítulo anterior, particularizando para el problema sencillo que aquí se va a resolver.

Finalmente, la tercera parte del trabajo se centra sobre el problema de optimización y análisis que se pretende resolver, estudiado desde el prisma económico. En el Capítulo 7 se define formalmente el problema y se presenta el marco matemático general, que incluye conceptos de la teoría del riesgo, además de enunciar algunos de los contextos en los que la resolución del problema abre un nuevo marco de posibilidades para la toma de decisiones. En el Capítulo 8 se presentan los métodos numéricos utilizados y los algoritmos que se han implementado para tratar este tipo de problemas. Ya para terminar, en el Capítulo 9 se resuelve un caso sencillo, con el fin de ilustrar la metodología completa.

Parte I.

Caracterización estadística de agentes externos

1 Marco general del problema

Se mide la inteligencia del individuo por la cantidad de incertidumbres que es capaz de soportar.

IMMANUEL KANT, 1724 - 1804

En este capítulo se presenta el problema ingenieril tratado en este documento desde un punto de vista global, en términos de variables de entrada y salida. Posteriormente, se sitúa el problema dentro del marco probabilístico para definir los objetivos que se pretenden alcanzar. Finalmente, se presenta el caso de estudio y el modelo considerado para los cálculos de solicitaciones.

1.1 El problema ingenieril desde el punto de vista global

El ingeniero es el individuo que usando conocimiento y técnicas científicas aplicadas, soluciona problemas u optimiza soluciones que afectan directamente a las personas. De forma coloquial, es la persona que usa *el ingenio* para resolver problemas cotidianos.

Desde un punto de vista abstracto y buscando la mayor generalidad posible, se puede decir que el ingeniero trabaja con sistemas que, en función de una entrada, genera una respuesta. El objetivo del ingeniero es caracterizar el sistema (principalmente mediante modelos matemáticos de diferente índole) de forma que pueda predecir, calcular o estimar, cómo la entrada al sistema influye en la salida.

Esto se hace generalmente, definiendo una serie de variables, que representan todos los agentes, datos, parámetros y condicionantes del modelo, llamadas **variables de entrada** y una serie de variables, que son las que se pretenden analizar, optimizar o utilizar para el bien público, llamadas **variables de salida**. La forma en que las segundas están relacionadas con las primeras es el núcleo del problema, es el verdadero desafío al que se enfrenta el ingeniero. Dicha relación, suele ser formulada mediante un modelo matemático, más o menos complejo, que es de esperar que tenga la validez suficiente como para representarla adecuadamente. Estos modelos incluyen:

- Ecuaciones algebraicas que relacionan las variables de salida con las variables de entrada. De entre ellas, las ecuaciones lineales son las más sencillas y prácticas¹.
- Ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de salida con las variables de entrada. De nuevo las ecuaciones diferenciales lineales son las más manejables.
- Modelos más opacos tipo *caja negra*, donde la única información disponible es la respuesta concreta a una serie de valores de la entrada.

En el ámbito de la ingeniería mecánica, es habitual que el sistema considerado se modelice mediante una ecuación diferencial, en derivadas parciales si es preciso, o, mediante la discretización correspondiente utilizando técnicas numéricas (El Método de los Elementos Finitos suele ser el más utilizado, aunque también

¹ Siendo puristas, son las únicas con las que se puede trabajar con total generalidad

se utiliza el Método de los Elementos de Contorno, el Método de las Diferencias Finitas o el Método de Volúmenes Finitos, según la idoneidad del caso).

En la Figura 1.1 se muestra un esquema de la representación de un sistema en términos de variables de entrada y de salida con algunos ejemplos de las mismas.



Figura 1.1 Representación abstracta de un sistema físico para un ingeniero.

Llegados a este punto es importante hacer una aclaración, que en ocasiones resulta fundamental: el ingeniero no puede actuar *necesariamente* sobre todas las variables del problema, algunas, en efecto, escapan a su control. Dicho de otro modo, aunque desde una perspectiva del modelo, se denomine en ocasiones a las variables de entrada variables independientes y a las variables de salida, variables dependientes, muchas de las primeras no pueden ser modificadas al gusto del ingeniero, sino que son ajenas a su control, y están relacionadas con factores del ambiente sobre el que no se puede actuar directamente (al margen de cambiando el sistema).

Es por esto precisamente que es importante realizar una clasificación de las variables de entrada y de salida, en función, no de su papel funcional en el sistema, sino del valor que tienen para el ingeniero y hasta qué punto éste puede actuar sobre las mismas.

1.1.1 Variables de entrada

Las variables de entrada, o variables independientes, son las variables que tienen influencia² sobre la salida o el estado del sistema. El sistema toma estas variables como datos. No obstante, es importante hacer una importante distinción sobre las variables de entrada que se utilizará en lo que sigue. Las variables de entrada pueden clasificarse en dos categorías:

- **Variable intrínsecas o parámetros:** Son todas aquellas variables que son conocidas *a priori* o al menos son consideradas como fijas en un estudio paramétrico. Estas incluyen variables como la geometría del sistema, las propiedades de los materiales, los parámetros del modelo propiamente dicho (algebraico, funcional...) etc.
- **Variables extrínsecas o ambientales:** Son todos los agentes que actúan de manera externa sobre el sistema, llamados también agentes forzadores o solicitudes. Estas incluyen las cargas externas, los agentes meteorológicos (viento, humedad, radiación...) los términos fuente en las ecuaciones de gobierno (generación o destrucción de cantidades conservadas), las interacciones con otros sistemas etc.

A propósito de esta clasificación, es importante señalar la diferencia existente entre estas variables desde el punto de vista práctico del ingeniero.

Las variables intrínsecas (de aquí en adelante parámetros) son las variables sobre las que el ingeniero generalmente puede actuar (aunque no siempre es el caso debido a dificultades técnicas, en seguida se pondrán ejemplos). Son las variables fundamentales sobre las que se diseña, con un propósito determinado, una vez establecido el modelo. Así, por ejemplo, el ingeniero deberá escoger un determinado material para

² Con pleno rigor, debería decirse *potencial influencia* puesto que el modelo puede tomar variables supérfluas que, en realidad, no tengan influencia sobre el estado del mismo

que el sistema se comporte de una forma concreta: un acero suficientemente resistente, un material cuya deformabilidad sea pequeña, una longitud de vano que no provoque flechas excesivas, un amortiguador con una ley viscoelástica adecuada...

Las variables extrínsecas (de aquí en adelante variables ambientales), suelen estar fuera del alcance o del control del ingeniero, en términos de diseño, aunque siempre se pueden adoptar estrategias de mitigación (rigurosamente, las estrategias de mitigación no modifican las variables ambientales, sino que cambian el propio sistema). El ingeniero debe, siempre que se enfrenta a la resolución de un sistema, convivir con dichas variables, tengan el valor que tengan. Además de que las variables ambientales son extrínsecas y por lo tanto no entran en juego en el momento del diseño, estas suelen presentar una dificultad añadida: a menudo, estas variables sólo pueden entenderse en un contexto de incertidumbre, es decir, definiendo una probabilidad de ocurrencia.

Una forma de entender este estudio es como una metodología para encarar de una forma activa y desde un punto de vista científico las variables ambientales en un contexto de incertidumbre. Dicho de otro modo, este estudio establece unas pautas para que el ingeniero tome una postura activa y eficaz frente al riesgo inherente a las variables ambientales.

Existe un caso concreto en el que el ingeniero no puede actuar sobre los parámetros del sistema y es cuando no se puede diseñar a medida un sistema, debido a limitaciones presentes en el *mundo real*, por oposición al *mundo ideal*. Estas limitaciones suelen ser de carácter técnico (imposibilidad física) o económico (falta de presupuesto): en el diseño de unas cimentaciones de un edificio, no se puede seleccionar las propiedades geomecánicas del estrato de arcillas o del sustrato rocoso subyacente, por ejemplo, ya que esto o es imposible o tendría un coste enorme³. Más aún, en ocasiones, los parámetros del modelo se desconocen. Volviendo al ejemplo anterior, es posible que no se conozcan las propiedades del sustrato rocoso o incluso si existen discontinuidades en el mismo (por ejemplo una galería subterránea), es decir, su geometría.

Aunque no se hará en este estudio, éstas y otras problemáticas referentes a los parámetros del modelo también pueden tratarse en un marco de incertidumbre, como se explicará en apartados posteriores.

1.1.2 Variables de salida

Hasta ahora se han tratado las variables que constituyen la entrada del sistema físico en cuestión. A continuación se harán algunos comentarios respecto a las variables de salida. Desde el punto de vista físico, el *núcleo* del problema es como el modelo (generalmente matemático) relaciona las variables de entrada con las de salida, los mecanismos físicos que rigen o gobiernan el fenómeno.

No obstante, lo que distingue a la ciencia de la ingeniería es el posicionamiento del científico frente al sistema: mientras el trabajo del científico acaba en una adecuada modelización del sistema en términos de variables de entrada y salida, el trabajo del ingeniero consiste en modificar lo posible el sistema para que las variables de salida tomen unos valores determinados, es decir, para que el sistema funcione de una forma *adecuada*.

Las variables de salida pueden clasificarse en dos categorías según la importancia que tengan para el ingeniero:

- **Indicadores de rendimiento:** Identificados generalmente por sus siglas en inglés, KPI (*Key Performance Indicators*), son las variables de salida que describen el rendimiento del sistema en relación con las funciones que debe desempeñar. Dependen por lo tanto, no sólo de la física del problema sino de la finalidad del mismo. Por dar algún ejemplo, la frecuencia de oscilación de un dispositivo puede ser en algunos casos un indicador del rendimiento de un sistema (por ejemplo en el caso del diseño de ferrocarriles, las vibraciones del movimiento de lazo pueden resultar molestas y es necesario controlarlas).
- **Variables intrascendentes:** Son todas las variables de salida que no se utilizan como palancas de rendimiento, es decir, que no pueden ser consideradas KPIs. Dichas variables no tienen importancia desde el punto de vista ingenieril (aunque tienen la misma importancia que los indicadores de rendimiento desde el punto de vista físico) pero por supuesto aportan información sobre el sistema y su

³ En ocasiones se usan algunas técnicas como la inyección de cemento en masa o el drenaje del nivel freático

funcionamiento. Un ejemplo de este tipo podría ser la flecha de una viga en voladizo en su extremo, cuando se desee cumplir un requisito específico de funcionalidad.

Los indicadores de rendimiento son las variables fundamentales que interesan al ingeniero en la toma de decisiones. Éstas pueden ser continuas (la potencia producida por una planta eléctrica en un instante), discretas (el número de paradas operativas que debe hacer un muelle) e incluso lógicas (si en una sección de una viga se llega a agotamiento elástico o no).

Desde el punto de vista clásico del diseño estructural, se trabaja con el valor de estas variables, combinándolas y comparándolas con un umbral de superación, lo que lleva a los conceptos habituales de las normativas de ecuación de verificación, coeficiente de seguridad y margen de seguridad. La instrucción de hormigón estructural [38] y la instrucción de acero estructural [40] usan habitualmente la noción de coeficiente de seguridad (la interpretación probabilística del mismo se hará más adelante, cuando se hable de los Métodos de Nivel I), mientras que la Recomendación para Obras Marítimas [30], de carácter consultivo, es algo más fina en ese sentido e introduce también los conceptos de margen de seguridad y otros métodos para abordar las ecuaciones de verificación (de nuevo, la interpretación probabilística se hará más adelante, donde se introducirán los Métodos de Nivel II y III). El enfoque clásico no es más que el que se ha presentado desde cierta perspectiva:

1. Las **ecuaciones de verificación** no son más que expresiones funcionales que relacionan los KPIs con un cierto umbral de superación: Si se fijan n variables significativas (que no son más que indicadores de rendimiento) y m condiciones que deben satisfacerse, la imposición $g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$ no es más que, desde el punto de vista general que aquí se ha presentado, evaluar el KPI lógico que viene dado por si dicha relación se satisface o no.
2. El **margen de seguridad** es un caso particular del punto anterior. En efecto, si dicho margen viene definido por una variable $y_j = f(x_1, \dots, x_n)$, función de otras variables de salida, que no debe exceder un umbral λ_j mediante $\Delta_j = y_j - \lambda_j \leq 0$ entonces basta tomar en el caso anterior $g_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n) - \lambda_j$.
3. El **coeficiente de seguridad** es de nuevo un caso particular de ecuación de verificación. Si dicho coeficiente viene por el cociente entre una variable $y_j = f(x_1, \dots, x_n)$, función de otras variables de salida, y un valor de referencia V_j mediante $C_j = \frac{y_j}{V_j} \leq 1$ entonces basta tomar en el caso anterior $g_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_j(x_1, \dots, x_n)}{V_j} - 1$.

Del mismo modo, es habitual en las normativas definir tres niveles en cuanto al rendimiento del sistema: Estado Límite Último, Estado Límite de Servicio y Estado límite de Operatividad, referentes respectivamente a la fiabilidad (seguridad), la funcionalidad (servicio) y la operatividad (funcionamiento) del sistema, que tienen asociados unos determinados modos de fallo o de parada (definidos por los valores de las variables de salida que hacen que no se verifiquen las ecuaciones de verificación). De nuevo, este enfoque es compatible con el marco general presentado ya que:

1. El **Estado Límite Último (ELU)**, referente a la seguridad del sistema, se produce cuando el valor adoptado por las variables del sistema ponen en peligro la integridad del mismo o suponen un riesgo para las vidas humanas⁴, el medio ambiente o el patrimonio cultural. El modo de fallo suele estar asociado con el colapso de la estructura, parcial o totalmente. Desde el enfoque adoptado, la verificación de los ELU no debe violarse **bajo ningún concepto**. Una forma de tratar este problema es definiendo una serie de KPIs asociados a los ELUs, de tipo lógico, que siempre tengan el mismo valor (*verdadero*, en el caso de que se planteen con la ecuación de verificación).
2. El **Estado Límite de Servicio (ELS)**, referente al servicio del sistema, es decir, al desempeño del sistema de las funciones para las que ha sido diseñado, se produce cuando el valor adoptado por las variables del sistema comprometen dicho desempeño o el rendimiento del sistema es menor al para el cual ha sido concebido. El modo de fallo suele estar asociado con las deformaciones o vibraciones excesivas, la formación de asientos, el desgaste o la degradación de los materiales. En el enfoque adoptado, una vez satisfechos los ELUs, ésta es la principal palanca de acción del ingeniero, ya que si los KPIs asociados a los ELS están bien definidos, no necesariamente tienen que tener una medición

⁴ O animales, cada vez existe más regulación para proteger a las especies del reino animal o vegetal más allá de la especie humana

cualitativa, sino que el servicio de un sistema puede medirse **de forma cuantitativa**. El hecho de que esta variable sea cuantitativa, y no lógica, es la que le permite al ingeniero cierta flexibilidad y diseñar en base a criterios de optimización.

3. El **Estado Límite de Operatividad (ELO)**, referente a la operatividad del sistema, es decir, a la capacidad del sistema para desempeñar su función, se produce cuando el valor adoptado por las variables del sistema no permiten el funcionamiento del mismo, pero estas no suponen un peligro para su integridad. En este caso no se habla de modos de fallo, como en el caso del ELU o ELS, sino de modos de parada. Los principales condicionantes de los modos de parada están asociados con agentes climáticos y son propios de plantas de producción o de infraestructuras de servicios más que de elementos estructurales pasivos (temporales que provoquen que no se use un muelle, tormentas que provoquen el abatimiento de un colector cilindroparabólico, borrascas que impliquen el cierre de un campo de turbinas eólicas...). De nuevo, en el enfoque adoptado, dichos KPIs repercuten directamente en el rendimiento del sistema y por lo tanto pueden entrar como variables en la optimización del sistema. Estos indicadores, no obstante, a diferencia de los referentes a ELS, tienen una importancia capital en la **gestión**.

Se observa por lo tanto que los métodos habituales usados en ingeniería en relación con las normativas civiles pueden incluirse en el marco general presentado en este documento. Más aún, este enfoque es unificador y generalizador en el sentido que permite una flexibilidad mayor en la definición del rendimiento de un sistema (más allá de su seguridad, funcionalidad y operatividad), sin plantear un conflicto con ningún marco normativo. El planteamiento que se seguirá en este estudio en cuanto a las variables de salida es por lo tanto un planteamiento integral en el que es tan importante la caracterización física del sistema como la caracterización funcional. En este marco general, que integra tanto el sistema como las funciones del mismo (Figura 1.2), es donde se sitúa el ingeniero, generalmente con la ayuda de modelos matemáticos que caracterizan la física y ayudan en la toma de decisiones.

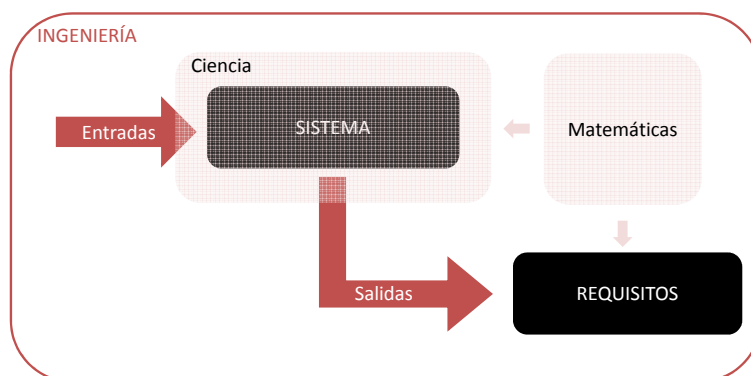


Figura 1.2 Esquema conceptual del problema al que debe enfrentarse el ingeniero.

A lo largo de este documento, se verá cómo se pone en práctica el enfoque adoptado para el análisis de las variables de salida.

1.1.3 Problemas clásicos en ingeniería

Hasta ahora se ha hecho especial hincapié en el problema del dimensionamiento y el diseño, ya que en el ámbito civil es el más fundamental y por lo tanto existe el condicionante de las normativas vigentes.

No obstante, antes de finalizar esta sección, procede realizar un breve repaso de los problemas clásicos a los que se enfrenta el ingeniero, para situarlos en el marco de estudio. Dichos problemas se diferencian por donde se pone el acento en las variables de entrada y salida y en la relación entre las mismas. A continuación

se presentan algunos, en orden de complejidad, aproximadamente. Debe destacarse que ninguno de estos problemas se presenta de forma aislada, sino que suelen aparecer conjuntamente, en estrategias iterativas de ingeniería varias.

- La **comprobación** consiste en, dado un sistema ya definido e inmutable, analizar si cumple unas especificaciones de rendimiento dadas. En el marco planteado, consiste en, **conocidos** los valores de todos los **parámetros** del sistema, comprobar si los **indicadores de rendimiento** adoptan unos **valores admisibles** para todo el **rango posible** de valores de las **variables ambientales**. La solución del problema puede condensarse en el valor que adopta una sola variable lógica que define si el sistema se comporta según las necesidades o no. Ejemplos de comprobaciones son ver si un depósito cilíndrico de acero puede almacenar un determinado volumen de líquido sin que se produzca colapso plástico, si las especificaciones técnicas de una bomba hidráulica la hacen adecuada para una determinada tarea o si la señal emitida por una antena determinada puede ser captada por un dispositivo receptor. En general se trata de un problema sencillo cuya principal dificultad radica en la complejidad del propio modelo físico.
- El **dimensionamiento o diseño**, que ya se ha tratado, consiste en la selección de las componentes del sistema adecuadas para que éste tenga un rendimiento de acuerdo con unas especificaciones dadas. En términos del marco planteado, consiste en el **cálculo o selección** de unos valores de los **parámetros**, de forma que los **indicadores de rendimiento** se encuentren en un **espacio paramétrico definido a priori** dentro del **rango posible** que puedan adoptar las **variables ambientales**. Algunos ejemplos son la selección de una sección (parámetro geométrico) de un perfil metálico para una viga en una componente estructural o de un tipo de hormigón (parámetro del material) para unas condiciones atmosféricas dadas o el cálculo de la masa necesaria para equilibrar una grúa torre (parámetro del modelo). La principal dificultad en esta familia de problemas es que se fija el valor de las variables de salida y se busca el valor que debe tener un subconjunto de las variables de entrada (los parámetros). La resolución del problema requiere la *inversión*, en un sentido abstracto, del modelo que rige el sistema físico o un procedimiento tipo *prueba y error*. En general, la primera alternativa es una ardua tarea que en el mejor de los casos sólo puede resolverse mediante métodos numéricos (involucra en general sistemas no lineales de ecuaciones algebraicas o diferenciales) y la segunda es un procedimiento tedioso o muy costoso computacionalmente.
- La **optimización de sistemas** consiste en ir un paso más allá. La idea es no sólo determinar el valor de algunos parámetros de forma que cumplan ciertas condiciones sino buscar además una optimalidad en algún sentido u otro. En este caso, uno de los **indicadores de rendimiento** (o una combinación de varios) se define como **función objetivo**, es decir, como función que se desea maximizar (o minimizar). Como ya se ha dicho, pueden especificarse otros condicionantes en el rendimiento para otros KPIs, lo que introduce **restricciones** en el problema. En este caso, algunos ejemplos son la selección de un perfil alar para una aeronave (minimización de la resistencia aerodinámica para una sustentación dada, además de otros condicionantes), el control de una planta de generación eléctrica (minimización del sobrepico o el tiempo de estabilización), o la optimización de los evaporadores en una planta de desalinización (coste de la instalación). Para este problema, además de las técnicas mencionadas anteriormente, se requiere de *métodos de optimización*, entre los que se encuentran los métodos clásicos del cálculo y el análisis matemático y los métodos en auge actualmente como las redes neuronales y los algoritmos genéticos.
- El **problema inverso** es similar al problema de dimensionamiento pero con un claro matiz: en este caso se pretenden determinar las características del sistema conocido exactamente el comportamiento del mismo, mediante mediciones o conocimiento explícito. Consiste por lo tanto en, **fijado un subconjunto de las variables de salida**, determinar, con la mayor **verosimilitud, exactitud o precisión** posible⁵ el valor de los **parámetros** o de las **variables ambientales** del sistema. El ejemplo más fundamental y cotidiano en el que el ingeniero resuelve problemas inversos, a veces inconscientemente es mediante la utilización de aparatos de medida e instrumentación. Otros ejemplos son la prospección geosísmica, la ingeniería forense o la criptografía y la teoría de la información. Son problemas muy complejos desde el punto de vista teórico y práctico ya que la *inversión* del problema en ocasiones puede resultar inabordable desde el punto de vista computacional y por lo tanto en la práctica imposible de resolver

⁵ Recuérdese que en términos estadísticos la verosimilitud es la probabilidad de que el valor estimado se aproxime al real, la exactitud se refiere al sesgo y la precisión a la desviación típica de una estimación

(sistemas de cifrado y decodificación) y en otras ocasiones ni siquiera es posible hacerlo desde el punto de vista teórico ya que el modelo no es biunívoco (o está muy mal condicionado) o no se dispone de información suficiente en la variables de salida. En estos últimos casos las técnicas más comunes consisten en tratar de *minimizar* cierto error, en el espacio paramétrico de salida. De nuevo estamos ante un problema de optimización, pero con una función objetivo definida en el espacio de variables de salida, lo que complica el problema enormemente.

En este estudio se estudiará un problema de **optimización** de un sistema productivo, donde las funciones objetivo se plantearán en un contexto económico, y las restricciones se formularán en términos de dos tipos de condiciones:

1. Especificaciones técnicas de rendimiento establecidas por el propio proyecto, es decir compromisos adquiridos con la parte contratante en cuanto a las prestaciones del sistema.
2. Decisiones estratégicas y financieras, tales como limitaciones de presupuesto, necesidades de amortización, imagen corporativa...

1.2 La aleatoriedad en la ingeniería

Hasta ahora no se ha entrado en el carácter de las variables del sistema, tanto de entrada como de salida, únicamente en su rol funcional con respecto al sistema y su relación con los diferentes problemas de la ingeniería. Llegados a este punto, es ineludible entrar en materia de un aspecto fundamental: el carácter determinista o aleatorio de las variables, que hasta ahora ha aparecido como concepto tangencial.

Una variable es determinista cuando no está sujeta a riesgo, es decir, cuando se tiene una certeza absoluta sobre su valor (sea un dato conocido o una incógnita). Por el contrario, una variable aleatoria es una variable sujeta a riesgo: no se conoce el valor de la variable sino la probabilidad de que ésta tome un conjunto de valores, lo que se denomina **suceso aleatorio** o simplemente **suceso**. A los diferentes valores que puede tomar la variable aleatoria se les denomina **realizaciones**. El origen de esta aleatoriedad puede ser puramente físico o una cuestión de conveniencia, como se precisará en lo sucesivo.

El hecho de introducir los conceptos de aleatoriedad e incertidumbre complica el tratamiento de las variables, ya que se necesitan conceptos como los de **variables aleatorias**, **estimación**, **riesgo**... procedentes del ámbito de la *teoría de la probabilidad*, la *estadística* y el *Análisis de riesgos*. Excelentes textos estándar de teoría de la probabilidad son [36] y también [69], aunque sin duda [59] es uno de los más referenciados en el ámbito de la ingeniería civil. En estadística, [76] es una muy buena introducción y [50] presenta una transición natural entre la teoría de la probabilidad y la estadística, aunque los textos ya citados también constituyen un buen punto de partida. Finalmente, [63] y [92] constituyen dos textos claramente orientados al análisis de riesgos y la toma de decisiones.

La extensión de todo lo expuesto hasta ahora del marco determinista al marco probabilista, no introduce ninguna dificultad en los mecanismos físicos del sistema (de hecho el sistema, es decir, la relación entre las variables de entrada y de salida, no cambia). Se dice que el modelo actúa de forma determinista sobre variables, o directamente que el modelo es probabilista ya que aunque el propio modelo es determinista, las variables se consideran en un marco de probabilidad. Pueden buscarse modelos más complejos, llamados modelos estocásticos, como las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas por ejemplo, en los que el propio sistema interactúa con la aleatoriedad, no solo la transforma de forma determinista. Un libro exhaustivo que presenta una importante base teórica de dichos modelos es [56] mientras que en [44] se presentan aplicaciones en finanzas y biología. La terminología usual suele ser la siguiente:

- **Modelo determinista:** Las variables son deterministas y el sistema las transforma de forma determinista.
- **Modelo probabilista:** Las variables son aleatorias y el sistema no interactúa con la aleatoriedad de las mismas. La transformación es determinista: a dos realizaciones idénticas del conjunto de variables de entrada se les asigna dos realizaciones idénticas de las variables de salida.

- **Modelo estocástico:** Las variables son aleatorias y el sistema interactúa con la aleatoriedad de las mismas. La transformación no es determinista: a dos realizaciones idénticas del conjunto de variables de entrada no se les asigna necesariamente dos realizaciones idénticas de las variables de salida.

En este estudio, se considerarán siempre modelos de tipo probabilista, aunque la consideración de modelos más complejos no suponen en la práctica una dificultad añadida enorme cuando se poseen técnicas numéricas adecuadas. Lo que sí se complica enormemente es el desarrollo matemático subyacente que las fundamenta. En el Apéndice A se hace un breve repaso de los conceptos de la teoría de probabilidad y estadística usados en este documento.

1.2.1 La aleatoriedad en los modelos físicos

Considerar la aleatoriedad en los fenómenos físicos puede deberse a multitud de razones.

En primer lugar, en ocasiones, el propio marco axiomático de la física subyacente está fundamentado en conceptos de la teoría de la probabilidad, como puede ser la física cuántica.

En segundo lugar, que corresponde con la mayoría de los casos, es la propia caracterización estadística de los sistemas la que define el marco probabilístico de trabajo, dentro de una física concreta. Esto sucede, por ejemplo, en la mayoría de modelos asociados con la meteorología [94] o el estudio de flujos turbulentos [4], [41]: aunque en un contexto ideal la mecánica de fluidos es determinista, la falta de información (por ejemplo, la falta de conocimiento de las condiciones iniciales, la geometría global...) pero sobre todo, el carácter caótico de la disciplina, reflejado en el fenómeno físico de la turbulencia, imposibilita en la práctica el uso de métodos analíticos o numéricos para su tratamiento determinista⁶. Otro ejemplo en el que se usa la teoría de probabilidad para trabajar con una realidad caracterizada estadísticamente es en la ciencia de materiales, tanto para cristalografía [79], como para materiales heterogéneos [68] y mecánica de la fractura y la fatiga [21], [95]. Para la ingeniería civil y ambiental, también son frecuentes los modelos de probabilidad basados en la estadística [59], [63].

Por último, en otros casos, los modelos estadísticos se usan simplemente por una cuestión de conveniencia, sin que haya modelos subyacentes que los justifiquen. Esto es frecuente cuando se desconoce cierta propiedad de un material, pero se tiene cierta información sobre su rango de valores (se suele utilizar una distribución uniforme en dicho intervalo), su posición y su dispersión (se suele utilizar una distribución normal)... En este caso, se suelen utilizar distribuciones que no responden a una realidad física, sino que modelizan convenientemente la incertidumbre, la mayoría de veces según un criterio de máxima entropía de información (la distribución uniforme maximiza la entropía en un intervalo acotado, la distribución normal en la recta real, conocida la dispersión mediante la varianza, la distribución exponencial en la semirrecta real, dada su media...), lo que significa que se está quitando la mínima incertidumbre posible al modelo [45].

La aleatoriedad como modelo estadístico basado en aspectos físicos

En el caso de que la aleatoriedad responda a una imposibilidad de describir un fenómeno físico en su totalidad de forma determinista, es necesario establecer unos modelos probabilísticos adecuados para las variables que se pretenden caracterizar. La variedad de modelos es amplísima, aunque pueden distinguirse dos familias de modelos este estudio se centrará en los **modelos paramétricos**. Las distribuciones de probabilidad consideradas para las variables aleatorias se definen en un espacio paramétrico de un determinado número de grados de libertad. Para la selección de las familias paramétricas es necesario un conocimiento profundo de la física del sistema, por ejemplo conociendo el soporte de la variable aleatoria y los fenómenos que explican su variabilidad. Posteriormente, se ajustan los parámetros de la familia a partir de un número finito de observaciones del fenómeno.

Los modelos aleatorios basados en fenómenos físicos, son, por sus características, ideales para tratar las **variables ambientales** en un contexto de incertidumbre, que es precisamente lo que pretende este estudio. Desde este enfoque, los parámetros del sistema se consideran deterministas (aunque no necesariamente conocidos) a diferencia de las variables ambientales, pero debido al carácter aleatorio de estas últimas, la

⁶ Un tratamiento mediante simulación requeriría no sólo de unas capacidades computacionales extraordinarias, sino de un conocimiento a nivel de continuo de la geometría espaciotemporal, algo que no puede contemplarse con máquinas de computación

respuesta del sistema también será aleatoria.

Así, estos modelos, suelen utilizarse para el **diseño de sistemas en condiciones de incertidumbre**, que son inherentes a la naturaleza, o mejor dicho, a la falta de información que posee el ingeniero sobre la misma (el mecanismo que desencadena un terremoto es perfectamente determinista y con la suficiente información el ser humano podría adelantarse a los acontecimientos, pero esta información no es disponible y como mucho pueden hacerse predicciones). La Figura 1.3 ilustra este proceso. Las variables escritas en tipografía mayúscula se consideran aleatorias, de acuerdo con la costumbre utilizada en el lenguaje matemático.

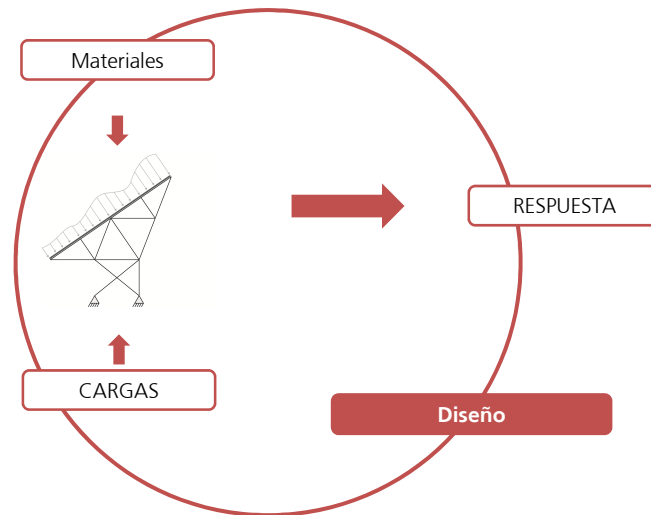


Figura 1.3 Diseño de estructuras ante incertidumbre de fenómenos físicos.

En los métodos clásicos, especialmente en la ingeniería civil, el problema de las variables ambientales se soluciona, de forma sencilla, mediante un método *semi-probabilístico*, el **método de los coeficientes de mayoración/minoración** o **coeficientes de seguridad** que se supone que capturan las fluctuaciones de las cargas y por lo tanto recogen la incertidumbre de las mismas [40], [38]. Así, se define un valor característico de una variable ambiental, por ejemplo una carga a la que se ve sometida una estructura, F_k , asociado a una probabilidad de no excedencia de 95 % (que caracteriza la variable aleatoria) y posteriormente se define un valor de cálculo $F_d = \gamma_G F_k$ donde γ_G es un coeficiente de mayoración (que depende del nivel de seguridad deseado y del efecto de las cargas) que hace que el diseño se haga de acuerdo con unos requisitos de seguridad. El gran inconveniente de estos métodos es que, por su carácter general y normativo, no permiten una caracterización en detalle del fenómeno para el caso particular estudiado y por lo tanto, aunque están del lado de la seguridad generalmente, generan en muchas ocasiones sobrecostos.

La aleatoriedad como modelo estadístico de incertidumbre

En el caso de que la aleatoriedad responda a una conveniencia matemática por desconocimiento total del fenómeno físico subyacente, los modelos probabilísticos responden a una necesidad operacional. La variedad de modelos no es tan amplia puesto que lo que se busca es una representación conveniente de los fenómenos, aunque no estén tan fundamentados en leyes de la naturaleza, sino en aspectos formales o matemáticos. De nuevo lo más usual es trabajar con **modelos paramétricos**, en este caso por simplicidad. Las familias paramétricas se escogen no sólo en función de las limitaciones físicas (en este caso, en la mayoría de los casos, basadas en el sentido común) sino también en base a la comodidad matemática perseguida para su caracterización, de su robustez o su carácter general. El ajuste de los parámetros de las familias se realiza mediante técnicas de inferencia estadística habituales, como en el caso anterior.

Los modelos aleatorios débilmente basados en fenómenos físicos, son, por sus características, ideales para tratar los **parámetros** en un contexto de incertidumbre, aunque este estudio no profundizará en este aspecto. Desde este enfoque, los parámetros del sistema se consideran aleatorios a diferencia de las variables ambientales, que se suponen deterministas, pero debido al carácter aleatorio de parte de las variables de

entrada, la respuesta del sistema también será aleatoria.

Estos modelos, por consiguiente, suelen utilizarse para el **análisis de sistemas en condiciones de incertidumbre**, que se deben a la falta de información que se posee sobre el propio sistema, por ejemplo debido a tolerancias en los procesos de fabricación o montaje, problemas en el control de la ejecución, análisis de sensibilidad respecto a defectos geométricos o imperfecciones en los materiales (heterogeneidad o anisotropía local). La Figura 1.4 ilustra este proceso.

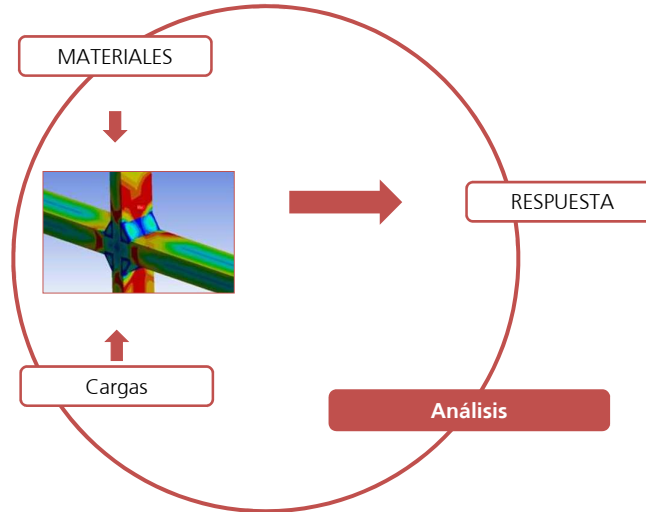


Figura 1.4 Análisis de estructuras ante incertidumbre de parámetros.

De nuevo, en los métodos clásicos, el problema de las imperfecciones en geometría o materiales se soluciona, de forma sencilla mediante el **método de los coeficientes de mayoración/minoración** que se supone que capturan la incertidumbre o falta de control en los parámetros [40], [38]. Así, se define un valor característico del parámetro considerado, por ejemplo la resistencia a compresión de un elemento estructural, R_k , asociado a una probabilidad de no excedencia de 5 % (que caracteriza la variable aleatoria) y posteriormente se define un valor de resistencia último $R_u = R_k / \gamma_M$ donde γ_M es un coeficiente de minoración (que depende del nivel de seguridad deseado y el tipo de propiedad) que hace que el diseño se haga de acuerdo con unos requisitos de seguridad. De nuevo el gran inconveniente de estos métodos son los sobrecostos debidos a su carácter general.

Combinación de ambos métodos

Por supuesto es posible plantear modelos probabilísticos que involucren las dos consideraciones realizadas hasta el momento: aleatoriedad ligada al desconocimiento parcial del fenómeno físico o al desconocimiento total del mismo. Los modelos pueden ser tan complejos como se desee e incorporar el carácter aleatorio en todas las variables involucradas.

Es importante señalar al respecto, que cuanto más factores aleatorios se consideren, más sobredimensionada puede estar la estructura de acuerdo con el método clásico de los **coeficientes de seguridad** debido al carácter multiplicativo del método. Considérese por ejemplo una combinación de los dos casos anteriormente presentados. R_k es la capacidad portante de un terreno y F_k es una sollicitación cualquiera. El método de las ecuaciones de verificación requiere que se verifique:

$$F_d \leq R_d \quad (1.1)$$

En términos de los valores característicos esto queda

$$\gamma_M \gamma_G F_k \leq R_u \Rightarrow \gamma F_k \leq R_u \quad (1.2)$$

Donde se ha definido un coeficiente de seguridad global γ , que captura toda la incertidumbre del sistema. Si se consideran valores típicos en el caso de un análisis de hundimiento de una cimentación, para cargas muertas desfavorables [39] $\gamma_G = 3$ y en cuanto al parámetro de resistencia del terreno [30] $\gamma_M = 2.6$, se obtienen valores de hasta $\gamma = 7.8$, lo que da una idea del efecto combinado de la metodología de los coeficientes de seguridad. Obsérvese que estadísticamente, además, está claro que esto no es consistente desde el punto de vista probabilístico puesto que si X e Y son dos variables aleatorias a las que se les asocia unos valores característico x_k y y_k (con probabilidad de no superación de 95 % por ejemplo) y se define $Z = XY$ con su valor característico z_k asociado a la misma probabilidad de no excedencia, en general que $z_k \neq x_k y_k$.

En efecto, basta por ejemplo considerar que si $X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma_x^2)$ y $Y \sim \text{LogN}(\mu, \sigma_y^2)$ son independientes, entonces de acuerdo con [59], $Z \sim \text{LogN}(\mu, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$. Así, considerando por ejemplo $\mu = 3$, $\sigma_x = 1$ y $\sigma_y = 1$

$$x_k = 38.2772, \quad y_k = 38.2772 \quad \Rightarrow \quad x_k y_k = 1465.1440$$

Mientras que

$$z_k = 75.6543$$

En este caso, si se quiere dimensionar para una probabilidad de fallo asociada a un nivel característico de 95 %, con el método de los coeficientes de seguridad, se está sobredimensionando en un factor

$$C = \frac{x_k y_k}{z_k} = 19.37$$

1.2.2 Diseño y optimización de sistemas en condiciones de incertidumbre

Ya se ha descrito el marco general en el que se va a trabajar. A partir de ahora el estudio se restringirá al problema en concreto que se trata en este documento: **el diseño y optimización de sistemas en condiciones de incertidumbre**.

Este caso, corresponde a la situación dada por las características siguientes:

- Los mecanismos físicos son perfectamente conocidos y se conoce perfectamente como están relacionadas las variables de entrada con las variables de salida mediante un modelo matemático. El **sistema** actúa de forma **determinista**.
- La física extrínseca al sistema, es decir, las variables ambientales, se tratan desde un punto de vista probabilístico, ya que se posee un conocimiento parcial de la física del fenómeno. Las **variables ambientales** son **aleatorias**.
- El sistema debe satisfacer ciertos requisitos, dados por las exigencias que se plantean en su rendimiento. Esto se hará en términos de **restricciones** en los **indicadores de rendimiento**. Como ya se comentó, estas pueden ser de carácter técnico, financiero o estratégico.
- Se pretende buscar cierta optimalidad, en un contexto económico, por lo tanto se tratará de **maximizar** algún indicador de rendimiento que refleje los **beneficios**⁷ obtenidos por la obra.
- El espacio paramétrico de optimización serán las características del sistema sobre las que el ingeniero puede actuar. Ciertos **parámetros** del sistema serán por lo tanto las variables de optimización, o si se quiere, las **incógnitas** del problema.

Así las cosas, se trata de la **maximización de los beneficios teniendo en cuenta los fenómenos ambientales**. Obsérvese que al ser parte de las variables de entrada (las ambientales) aleatorias, todas las variables de salida lo son. Así, los indicadores de rendimiento que se evaluarán, tanto para las restricciones como para la función objetivo, serán variables aleatorias, donde la incertidumbre habrá sido trasladada directamente por la acción del sistema de las variables de entrada a las variables de salida. Esto, aunque intuitivamente no plantea dificultades si se considera realización a realización, complica ligeramente el problema de optimización, ya que pasa de ser determinista a ser un problema de optimización estocástico. Las dos diferencias fundamentales son:

⁷ Pueden ser beneficios comerciales, o simplemente una monetarización directa de la producción industrial

1. Ya no tiene sentido imponer que una variable aleatoria sea inferior a un cierto umbral, sino que habrá que especificar la probabilidad de no excedencia del mismo, aunque ésta sea 1. Por lo tanto, si $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ son las variables de entrada, $\{y_j\}_{j=1,\dots,m}$ son las variables de salida y $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, m$ representa la transformación de las variables dada por el sistema, se pasará de l restricciones del tipo $y_j \leq C_j$, $j = 1, \dots, l$ a restricciones del tipo $\Pr[Y_j \leq C_j] \geq \alpha_j$, $j = 1, \dots, l$, donde $\alpha_j \in [0; 1]$.
2. Ya no tiene sentido hablar del máximo de una variable aleatoria, ya que el conjunto de variables aleatorias no es un conjunto ordenado, cosa que sí es \mathbb{R} (al menos desde el punto de vista natural), por lo que si se elige, sin pérdida de generalidad, como variable de salida a optimizar y_1 , habrá que definir un indicador paramétrico asociado a la variable aleatoria Y_1 que capture de forma oportuna la esencia de lo que se pretende optimizar. Dicho de otro modo, habrá que definir $\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathcal{V} es el espacio de variables aleatorias, y realizar la maximización sobre $\theta(Y_1)$. Este paso es **fundamental** y requiere de una toma de decisión importante, ya que no sólo se está definiendo el *objetivo de la optimización*, sino la *actitud frente al riesgo* adoptada. A la aplicación θ se le llamará en este contexto el **espíritu** del problema. En el Apéndice A se presentan varios indicadores paramétricos asociados a variables aleatorias justificando el alcance y las propiedades de cada uno de ellos.

Es importante señalar, que debido al importante carácter aleatorio del problema, se deben usar técnicas estadísticas para la caracterización de los agentes ambientales, que luego repercutirán en las variables de salida, es decir, en las probabilidades de que se cumplan las restricciones y en los valores del espíritu. La estadística sólo tiene sentido en un contexto en que las muestras analizadas tienen un tamaño suficientemente grande (de hecho, es en el infinito donde la estadística matemática colapsa con la teoría de la probabilidad, vía la *ley de los grandes números*). Por lo tanto, los sistemas en los que tiene sentido aplicar esta metodología deben verificar imperativamente las dos propiedades siguientes:

- Tienen que estar constituidos por una serie de estructuras muy repetitivas (idénticas).
- El número de estas estructuras tiene que ser muy grande (al menos del orden de 100).

Es por esto por lo que la metodología presentada se adecua perfectamente al diseño de plantas de generación eléctricas. La palabra *planta* refleja la idea de que muchos sistemas distribuidos en un espacio contribuyen a la generación de energía, bien no centralizada, como los aerogeneradores, las columnas de agua oscilantes o los paneles fotovoltaicos, bien centralizada, como las plantas de heliostatos o las de colectores cilindroparabólicos.

1.2.3 Análisis de sistemas en condiciones de incertidumbre

Una vez resuelto el problema de optimización, procede realizar un análisis del funcionamiento en condiciones de incertidumbre. Dicho análisis es de vital importancia para llevar a cabo las tareas de gestión y mantenimiento, realizar las coberturas de seguros necesarias, realizar un análisis de la producción e incluso valorar aspectos económicos o de financiación.

Para fijar ideas, considérese el conjunto de variables de entrada $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ particionado en $\{x_i\}_{i=1,\dots,k}$ que son las variables ambientales y $\{x_i\}_{i=k+1,\dots,n}$ que son los parámetros del sistema. Una vez resuelto el problema de optimización los parámetros quedan fijados, de acuerdo con un espíritu óptimo: $x_i = x_i^*$, $i = k+1, \dots, n$. El resto de variables son aleatorias $x_i = X_i$, $i = 1, \dots, k$ y por lo tanto todas las variables de salida Y_j , $j = 1, \dots, m$ son aleatorias. De entre ellas, $Y_1 = f_1(X_1, \dots, X_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ es la función objetivo del problema. Aunque se ha optimizado el espíritu, la variable sigue siendo aleatoria con una determinada distribución. Un segundo grupo de variables aleatorias de salida son las que participan en las $m-1$ restricciones restantes (dejando de lado la función objetivo). A priori, de la resolución del problema de optimización, se sabe que $\Pr[Y_j \leq C_j] \geq \alpha_j$, pero es menester conocer sus distribuciones, tanto marginales como conjunta. Finalmente, el resto de variables de salida Y_j , $j = l+1, \dots, m$ también son aleatorias y aunque no haya especificaciones concretas sobre las mismas pueden dar una información útil sobre el comportamiento del sistema.

1.3 Modelo de cálculo para los agentes forzadores

En este estudio se aplicará todo lo expuesto en las secciones anteriores al diseño de una estructura cuyo diseño viene determinado por las cargas de viento. Así, las variables ambientales consideradas serán las fuerzas que se ejercen sobre la estructura, cuyo agente común es el viento.

1.3.1 Presentación del sistema

El sistema que se considerará es una estructura que soporta un conjunto de paneles fotovoltaicos. Se trata de una estructura típica de plantas de producción eléctrica fotovoltaicas. Aunque el método presentado es de carácter general, por simplicidad se asumirán las dos hipótesis siguientes:

1. La estructura puede modelizarse mediante una estructura de barras articuladas.
2. El modelo puede suponerse bidimensional.

La Figura 1.5 ilustra la topología de la estructura definida.

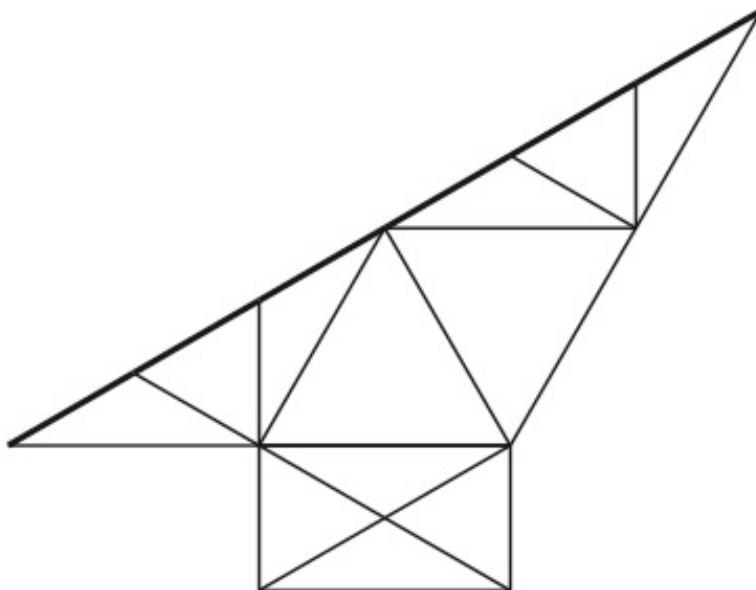


Figura 1.5 Estructura de soporte de paneles fotovoltaicos empleada.

Parámetros

En el sistema considerado, los parámetros son todas las variables que caracterizan la geometría (posiciones de cada uno de los nodos), las propiedades de las barras necesarias para la teoría de elementos lineales articulados (área de la sección de cada barra, longitud de la barra, módulo de elasticidad longitudinal e inercia⁸ y las características resistentes de los materiales utilizados. Además, para situar el problema en un marco económico, también se definirán parámetros de tipo económico, asociados con la productividad de los elementos, los costes iniciales y los costes de mantenimiento.

Variables ambientales

En cuanto a las variables ambientales, éstas serán las fuerzas externas, ejercidas sobre los nodos de la estructura. Para el cálculo de las fuerzas, se ha utilizado el software comercial XFLOW®.

XFlow® es un software comercial CFD de simulación que resuelve problemas de mecánica de fluidos mediante modelos de partículas mesoscópicas. Las ecuaciones que se resuelven son las ecuaciones de **Lattice Boltzmann** [84], [41], que son, en cierta medida, las ecuaciones de conservación en un contexto probabilístico discreto, donde se consideran las diferentes interacciones de las partículas fluidas (de hecho, las ecuaciones de Navier - Stokes pueden considerarse una expresión macroscópica de las ecuaciones de Boltzmann, donde

⁸ La inercia no interviene en teoría de elementos lineales articulados con hipótesis de pequeños desplazamientos pero sí que interviene en el caso de grandes desplazamientos

entidades macroscópicas como la densidad, la cantidad de movimiento o la energía son momentos estadísticos de las distribuciones de probabilidad obtenidas). El software está especialmente diseñado para compañías que requieren simulaciones de flujos aerodinámicos transitorios de gran precisión, gestión de agua y cálculos de interacción fluido - estructura. La Figura 1.6, extraída del propio manual del software XFlow® ilustra los diferentes métodos. La Figura 1.6a ilustra como se articulan los métodos en función de la física que resuelven mientras que la Figura 1.6b ilustra la clasificación de los métodos en función de las técnicas numéricas utilizadas.

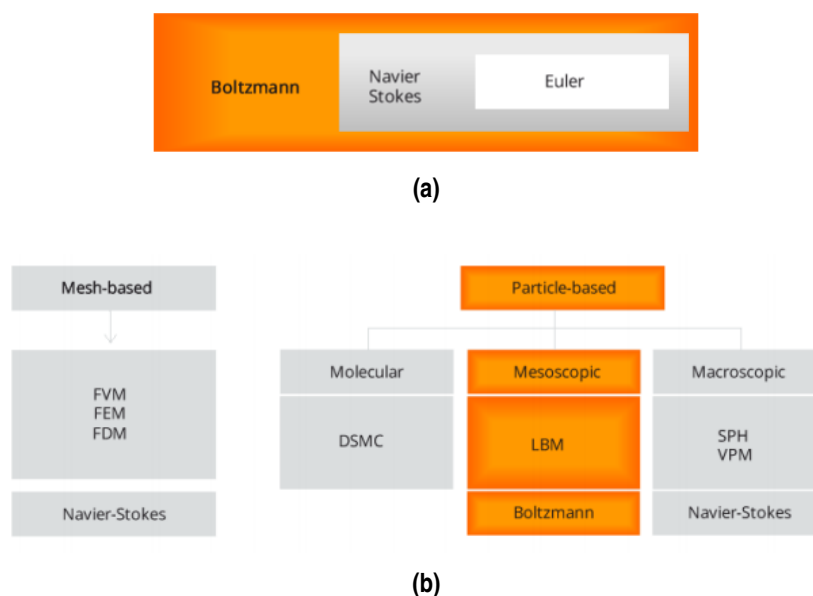


Figura 1.6 Métodos disponibles a la hora de realizar simulación CFD.

En palabras de la propia empresa que desarrolla el software *el enfoque mediante XFlow simplifica el flujo de trabajo, minimiza la presencia de parámetros en los algoritmos y evita el tiempo que se invierte en procesos de mallado*. Esto último es esencial, ya que la propia naturaleza de las ecuaciones que se resuelven permiten una resolución del problema no basada en la malla, por lo que ésta puede refinarse automáticamente allí donde sea necesario. El enfoque numérico para resolver la turbulencia que se utiliza es un enfoque de *Large Eddy Simulation* (LES) [41], en el que se resuelve completamente por simulación directa el flujo hasta una cierta escala de remolino, en la que ya se usan modelos paramétricos de turbulencia. La Figura 1.7 ilustra el enfoque numérico utilizado comparado con los otros métodos habituales.

Para la resolución de la capa límite, XFlow® usa una función de pared no estática. Dicho modelo funciona en la mayoría de los casos, lo que significa que el usuario no tiene que elegir entre diferentes modelos de funciones de pared y tener en cuenta las limitaciones de cada uno de ellos.

La Figura 1.8 muestra un ejemplo, también extraído del manual de XFlow® de un caso resuelto, donde puede observarse la enorme precisión en la captura de los vórtices del flujo.

En el caso de los paneles fotovoltaicos, se han simulado 10 minutos de historia de cargas aerodinámicas sobre una estructura tridimensional de 7 placas alineadas, inclinadas $\alpha = 36^\circ$ respecto a la horizontal (ángulo *Pitch* de 36°), que es la inclinación habitual a la que se ponen los paneles fotovoltaicos en estas latitudes. Las condiciones de contorno son un viento frontal a la estructura cuyas características son:

- El viento es frontal a la estructura (ángulo *Yaw* de 0°).
- La velocidad media del viento utilizada es de $V_m = 25 \text{ m/s}$.
- El espectro de turbulencia utilizado es el espectro de Von Kármán, utilizado de forma sistemática para el cálculo de niveles de turbulencia en la superficie terrestre [80].
- Se ha despreciado el efecto de todos los componentes estructurales que no son los siete espejos. Por lo tanto, para la simulación, sólo se ha considerado la geometría de los paneles.

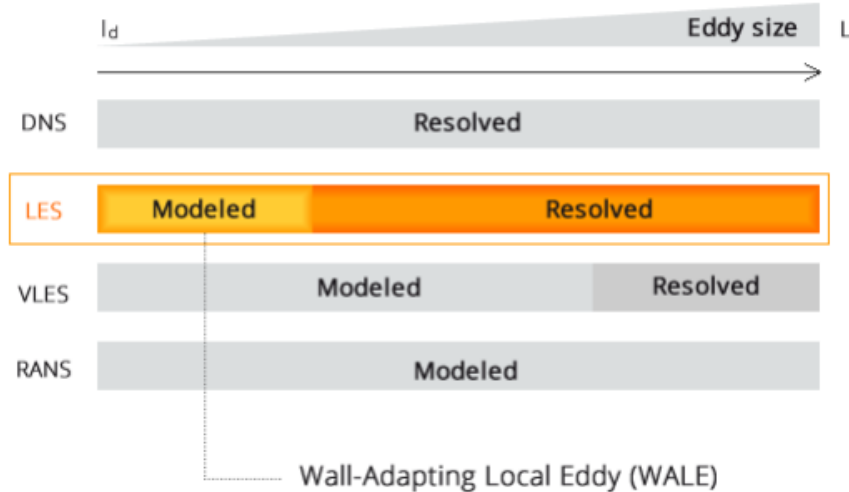


Figura 1.7 El modelo LES con respecto a otros modelos de cálculo de turbulencia.

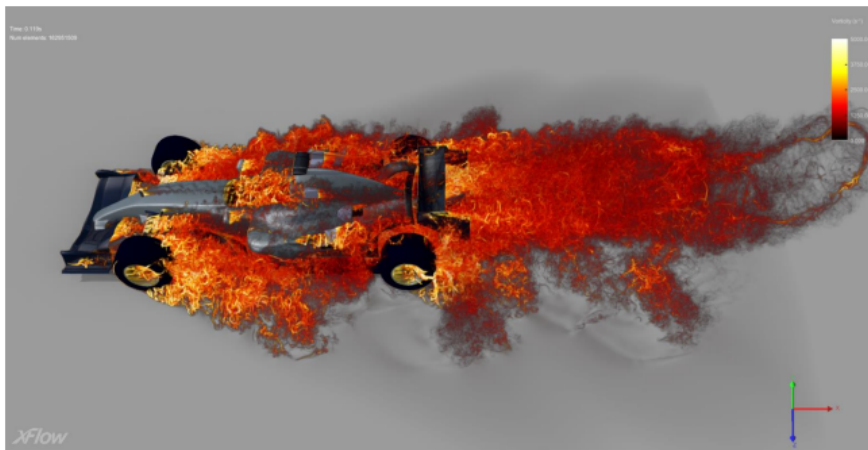


Figura 1.8 Ejemplo de un caso resuelto mediante el software XFLOW®.

La Figura 1.9 muestra la estructura ensayada virtualmente utilizando el software XFlow®. La Figura 1.10 muestra el perfil central de algunos de los campos instantáneos solución obtenidos para el flujo, en un instante concreto y algunos promedio, la Figura 1.11 muestra algunos de los campos instantáneos solución el plano horizontal que corta la estructura por la mitad y algunos promediados, la Figura 1.12 muestra algunos campos promediados sobre las placas. A efectos de este problema, lo que interesa son los campos instantáneos de presiones que se producen sobre las placas.

En realidad, dado que el modelo utilizado es un modelo estructural de barras articuladas, lo que interesa son las fuerzas en los nodos que sustentan cada una de las placas, que se obtienen por integración directa del campo de presiones sobre cada una de las placas. El procedimiento para pasar de presiones a cargas viene ilustrado en la Figura 1.13, para un caso bidimensional. Para el caso tridimensional que se ha resuelto mediante simulación numérica, el procedimiento es análogo. Las fuerzas obtenidas en la dirección perpendicular al plano en el que se encuentra el modelo estructural bidimensional son prácticamente despreciables, de ahí que baste utilizar un modelo bidimensional, ya que las mayores solicitaciones de la estructura se darán en ese plano. Al respecto se plantea la pregunta de si no hubiera sido suficiente con realizar una simulación bidimensional en XFlow®. La respuesta es que probablemente no. El efecto borde de las placas tiene influencia sobre la solución obtenida, por lo que, aunque las fuerzas en la dirección perpendicular al plano de la estructura de barras sean despreciables, puede que las fuerzas contenidas en el plano varíen de un caso 2D a un caso 3D.

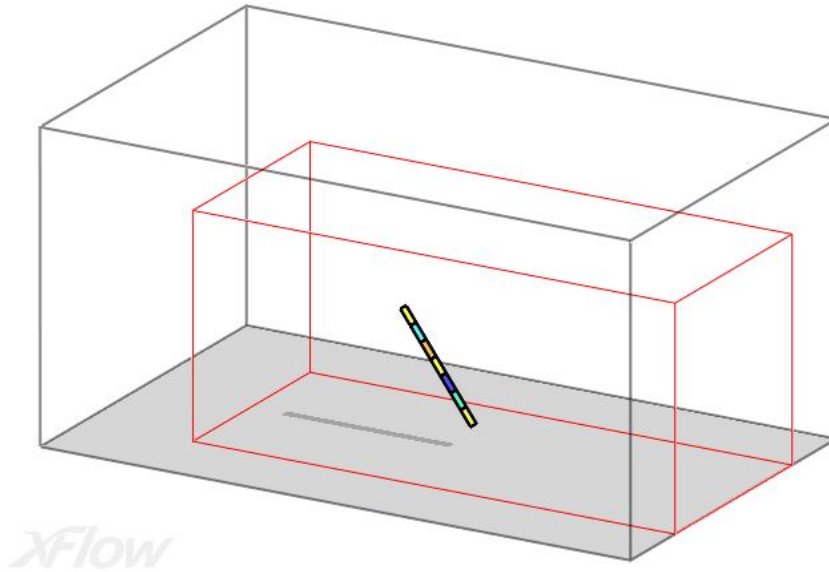


Figura 1.9 Configuración de placas ensayadas en XFlow®.

1.3.2 Hipótesis de partida para el análisis

Hasta lo que aquí se ha descrito, todas las cargas se han calculado en un contexto determinista. Dicho de otro modo, se ha considerado **una realización**, dentro del marco de incertidumbre en el que se aborda el problema. El marco probabilista en el que realmente se encuentra el problema se ha reflejado en dos aspectos fundamentales a la hora del cálculo de las cargas, directamente relacionados con las condiciones de contorno de la simulación de CFD:

- Se ha fijado una velocidad de entrada $V_m = 25 \text{ m/s}$.
- Se ha seleccionado un cierto espectro de turbulencia (en este caso el de Von Kármán).

En realidad, la velocidad media del viento no es conocida, sino que es una variable aleatoria que depende del lugar, ya que su valor depende de modelos de meteorología de mesoescala en los que la física no es perfectamente conocida. Este caso corresponde claramente con uno de los casos considerados en los que la incertidumbre hace acto de presencia de manera decisiva.

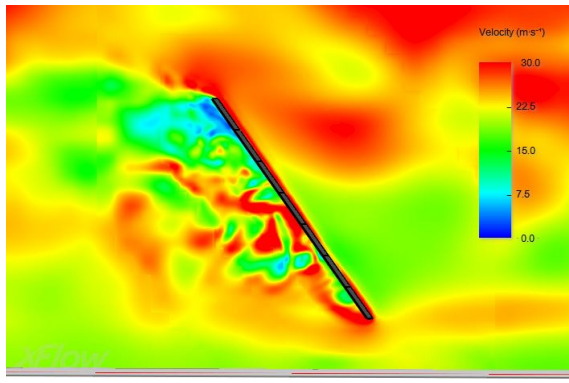
Por otro lado, además, el fenómeno de modelización de la turbulencia se hace mediante un espectro. Una forma de interpretar dicho espectro es considerar la turbulencia como un fenómeno aleatorio, estacionario y ergódico, y representarla mediante su espectro de energía [80], que es de hecho lo que hace el espectro de Von Kármán.

En definitiva, desde un punto de vista global probabilístico, las cargas sobre la estructura presentan una incertidumbre intrínseca que además se refleja en una variabilidad temporal (ésto es de hecho lo que provocan los fenómenos turbulentos).

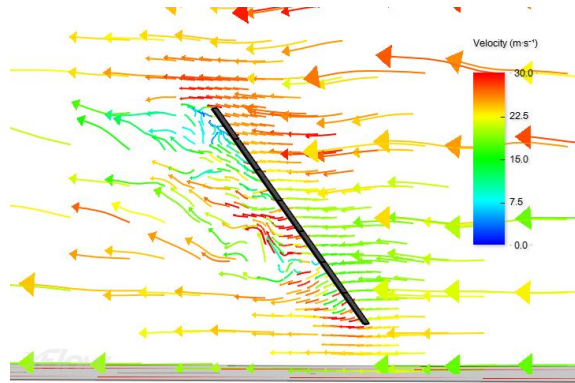
En mecánica de fluidos, especialmente en aerodinámica, la ecuación fundamental para el cálculo de fuerzas sobre cuerpos fuselados o romos [72] es

$$F = \frac{1}{2} C_F A \rho V^2 \quad (1.3)$$

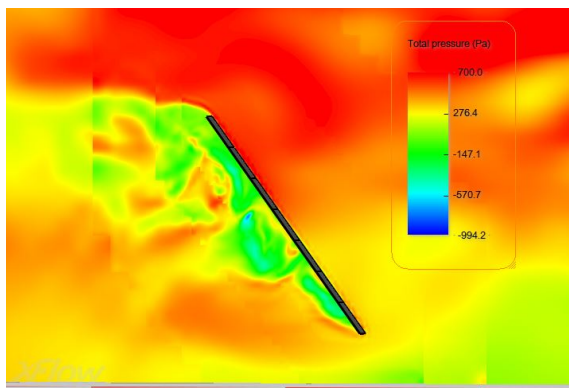
Donde V es la velocidad característica del flujo, ρ es la densidad, A el área de exposición del cuerpo y $C_F = C_F(\text{Re})$ es un coeficiente adimensional que depende del número de Reynolds, Re , definido mediante $\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$, donde L es la dimensión característica del objeto, y $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática del fluido, de viscosidad dinámica μ .



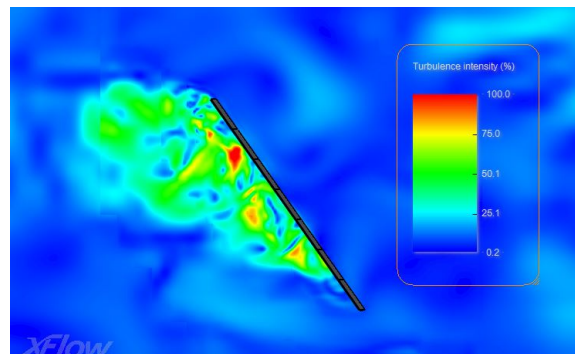
(a) Campo de velocidades instantáneas (módulo).



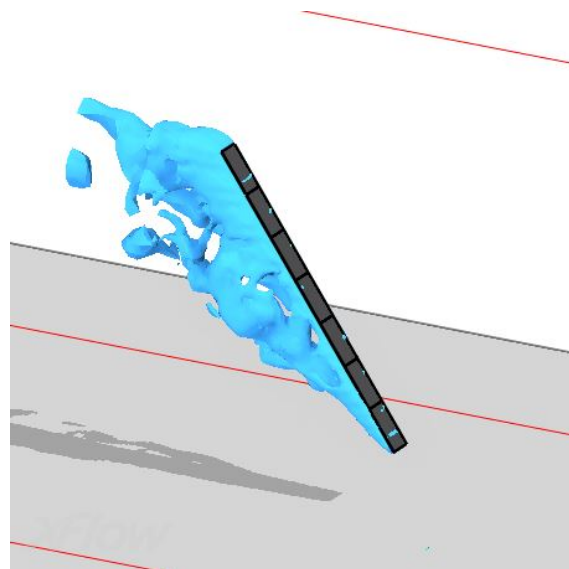
(b) Campo de velocidades instantáneas (vectores).



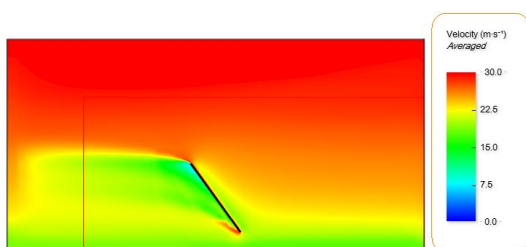
(c) Campo de presiones instantáneas.



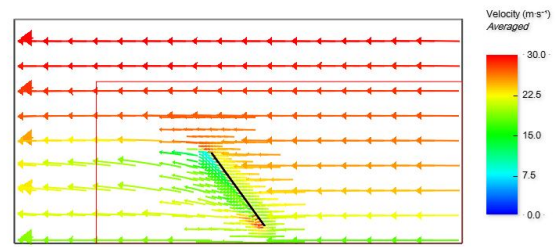
(d) Campo de intensidades turbulentas instantáneas.



(e) Pérdidas de presión instantáneas.



(f) Campo de velocidades promediadas (módulo).



(g) Campo de velocidades promediadas (vectores).

Figura 1.10 Cortes del campo solución en el plano de la estructura.

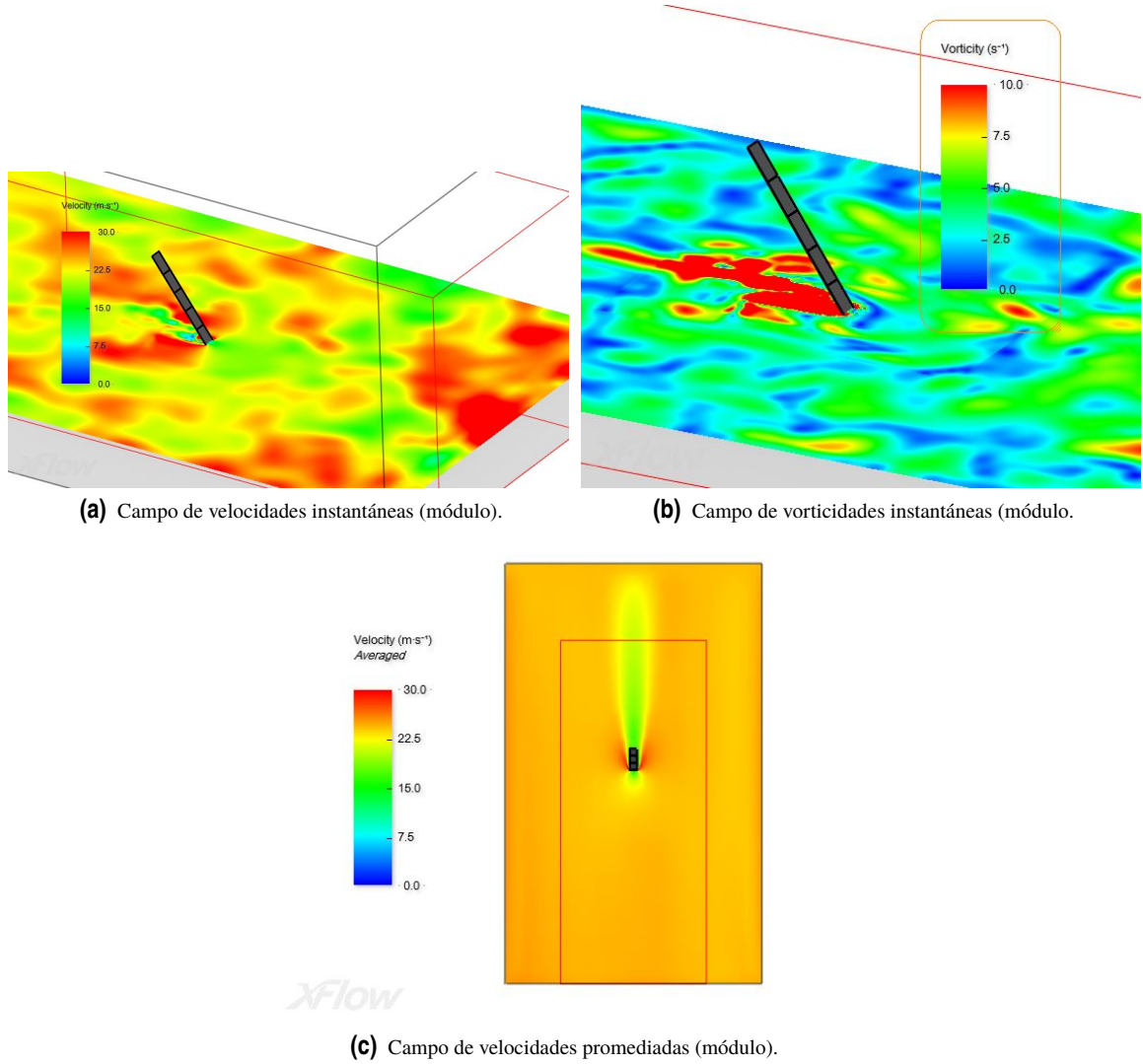


Figura 1.11 Campos solución en el plano horizontal medio de la estructura.

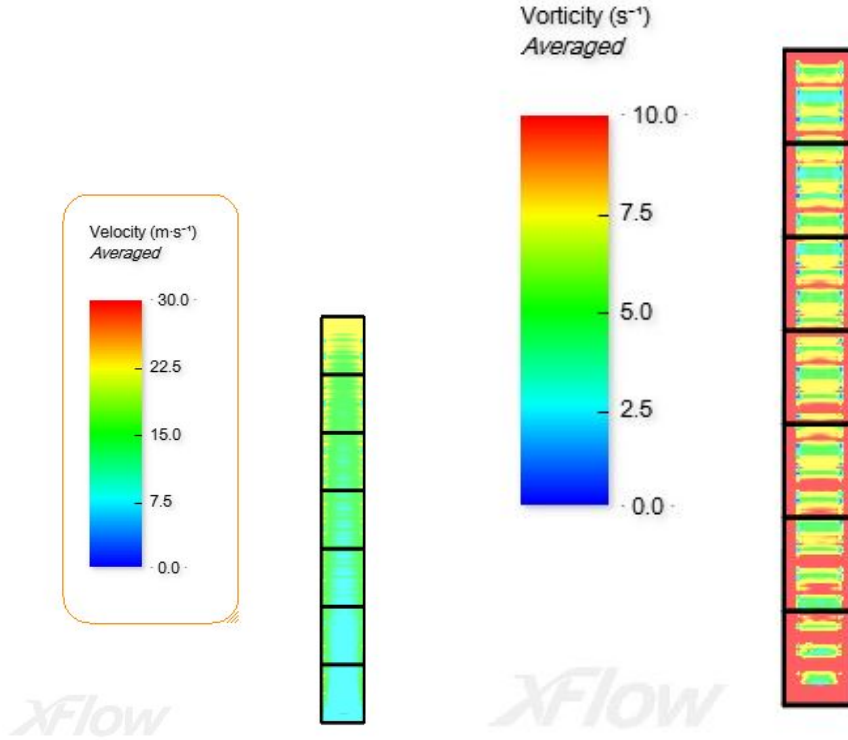
En esta fórmula, todos los términos son considerados deterministas salvo, a lo sumo V y C_F . La variable V , que puede ser asignada a la velocidad media del flujo V_m . Así, en general, se puede escribir, para la fuerza i -ésima considerada (cada nodo posee dos fuerzas, una de sustentación y otra de arrastre).

$$F_i(t) = \frac{1}{2} C_{F_i}(V, t) A \rho V^2 \quad (1.4)$$

Donde $C_{F_i}(V, t)$ es una variable aleatoria. Al estar indexada en el tiempo t , se dice que es un **proceso estocástico**. Algunos conceptos sobre procesos estocásticos vienen reflejados en el Apéndice A.

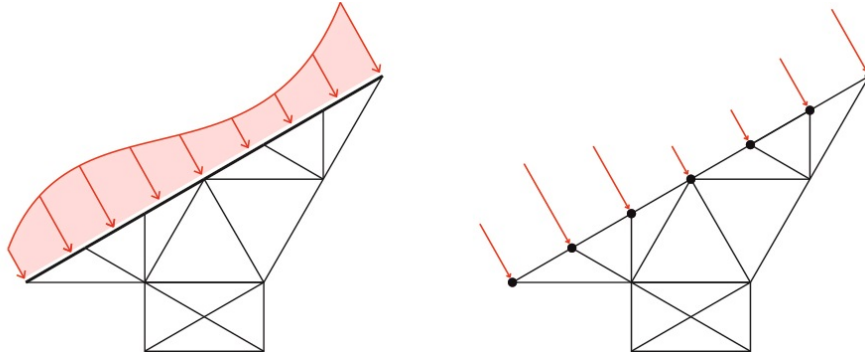
A continuación se realizan las **dos hipótesis fundamentales del análisis**:

1. El número de Reynolds, Re del flujo, **es muy alto**. Dicha hipótesis es razonable por tratarse de cargas aerodinámicas ambientales, en las que el fluido considerado es el aire, cuya viscosidad cinemática a temperatura ambiente es del orden de $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Para condiciones de viento estándar $V = 25 \text{ m/s}$ y estructuras de dimensiones del orden de un panel fotovoltaico, es decir $L = 1 \text{ m}$, se obtiene $Re = 1.7 \cdot 10^6$. Bajo dichas condiciones, se observa que C_F es independiente de Re (ver por ejemplo [72] o [80]), y por lo tanto independiente de $V = V_m$. Obsérvese que esto no es otra cosa que decir que, para cualquier valor de t , las variables aleatorias C_{F_i} y V_m **son independientes**.
2. El proceso estocástico $C_{F_i}(V, t) = C_{F_i}(t)$ es **estacionario** y **ergódico**. La definición precisa de lo que ello significa puede verse en el Apéndice A, pero esto significa que los estadísticos muestrales coinciden con



(a) Velocidades promediadas (módulo).

(b) Vorticidades promediadas (módulo).

Figura 1.12 Campos solución sobre las placas fotovoltaicas.**Figura 1.13** Transformación de la distribución de presiones (resultante de intradós y extradós) a la distribución de fuerzas en los nodos.

los estadísticos en un horizonte temporal. Dicho de otro modo, que una sola muestra es representativa de toda la estadística del fenómeno. Esto es fundamental ya que permite inferir la estadística de C_F a partir de **una sola realización**.

1.3.3 Modelo probabilístico

Una vez establecidas las hipótesis de partida, la Ecuación (1.4) queda

$$F_i(t) = \frac{1}{2} C_{F_i}(t) A \rho V^2 \quad (1.5)$$

El problema se reduce por lo tanto a considerar los procesos estocásticos $C_{F_i}(t)$, $i = 1, \dots, m$. Una posible alternativa sería caracterizar conjuntamente la familia de procesos estocásticos $\{F_i(t)\}_{i=1, \dots, m}$. No obstante, la

Ecuación (1.5) es no lineal y esto seguramente sea complicado. Además, en la literatura la variable aleatoria V ha sido tratada innumerables veces ya que en multitud de situaciones es necesario caracterizar la velocidad del viento. Los modelos probabilísticos que caracterizan la velocidad del viento son muy precisos y de un alcance impresionante. Las variables $C_{F_i}(t)$ son mucho más complicadas de caracterizar, ya que su origen físico es la turbulencia, aunque se realizará un esfuerzo por hacerlo.

En definitiva, la metodología de caracterización de variables ambientales es

1. Caracterización de la variable aleatoria V . Esto se hará en el capítulo 2.
2. Caracterización de las variables aleatorias $C_{F_i}(t)$. Esto se hará en el capítulo 3.

Al modelo planteado, se le denominará **Modelo V-C**. Los capítulos siguientes abordan cada una de las dos variables que intervienen en él de forma exhaustiva.

2 Caracterización de la velocidad del viento

The pessimist complains about the wind; the optimist expects it to change; the realist adjusts the sails

WILLIAM ARTHUR WARD, 1921 - 1994

En el Capítulo 1 se presentó el **modelo probabilístico C-V** que se usará para tratar las variables ambientales que intervienen en el problema de caracterización de las cargas aleatorias que actúan sobre una estructura que soporta paneles fotovoltaicos. La ecuación fundamental establecida era

$$F_i(t) = \frac{1}{2} C_{F_i}(t) \rho A V^2 \quad (2.1)$$

Donde F_i es la variable aleatoria que representa la fuerza de sollicitación estructural en el grado de libertad i -ésimo, $C_{F_i}(t)$ es el proceso estocástico que representa la historia del coeficiente de presiones asociado al grado de libertad i , ρ y A son el área del objeto expuesto y la densidad del aire y V es la variable aleatoria que representa la velocidad del viento.

Este capítulo versa sobre el modelo utilizado para la variable aleatoria V .

2.1 Distribuciones mixtas

Una distribución de probabilidad mixta es una distribución de probabilidad que caracteriza, simultáneamente el régimen central y el régimen extremal de una variable aleatoria. Incorporan en una misma variable aleatoria la población de valores extremos y la población de valores centrales. Las distribuciones mixtas paramétricas poseen unos umbrales definidos (uno para la cola inferior y otro para la cola superior) que marcan el punto a partir del cual se considera que el régimen de la variable no es central, sino extremal. Por supuesto, estos valores del modelo son parámetros que pueden ajustarse mediante técnicas estadísticas, como son los parámetros de posición, de escala y de forma, para modelos paramétricos más sencillos.

Diferentes versiones de estos modelos han sido utilizados en áreas tan variadas como el análisis de índices económicos y ambientales ([10], [27]), hidrología (estimación de caudales diarios, [85], [17], [82], cálculo de precipitaciones diarias [93], [57], [43], [53], [82]) e hidrodinámica (altura de ola significativa, [18], [83]). Todos los modelos usan distribuciones mixtas pero se diferencian en las familias paramétricas utilizadas para ajustar los cuerpos centrales y las colas de la distribución. Dichas familias, por supuesto, guardan relación con el fenómeno físico subyacente y por lo tanto, un paso fundamental en la elección del modelo es la selección de las familias paramétricas adecuadas del régimen central y extremal. Por ejemplo:

- En economía y finanzas, es habitual que las rentabilidades de inversiones presenten unas colas más pesadas que las de la distribución normal (debido a las crisis económicas), de ahí que, además de técnicas como el uso de la familia de distribuciones *t-Student*, los modelos mixtos que combinan un cuerpo central que sigue una distribución normal y colas pertenecientes a la familia de distribuciones

Generalizada de Pareto (GDP), cuyo parámetro de cola es ajustable sean un enfoque muy oportuno [27]. Otras variantes incluyen el uso de una distribución *Gamma* para el régimen central [10].

- En hidrología y en hidrodinámica, es bastante extendido el uso de distribuciones de tipo *log-normal* para representar el cuerpo central de las precipitaciones, los caudales o las alturas significantes de ola. Aunque la razón física es más opaca en estos casos, esto puede deberse a que en las variables consideradas actúan muchas variables de forma multiplicativa, lo que justifica que el logaritmo de las mismas, en base al teorema central del límite, siga una distribución normal [82] [83]. Otros modelos con más grados de libertad (más parámetros) incluyen distribuciones *Weibull* [18] o *Gamma* [43] e incluso algunos más complejos series de distribuciones uniformes [85]. Todos los modelos, en cualquier caso, están basados en variables aleatorias cuyo soporte es \mathbb{R}^+ (toman valores positivos), lo que muestra que todas tienen, en mayor o menor medida, un fundamento físico subyacente. Para la cola superior vuelven a usarse generalmente distribuciones *Generalizadas de Pareto*, mientras que para la cola inferior, finita, se usan otros modelos paramétricos como la distribución *Weibull*.

El ajuste de los parámetros del modelo puede realizarse de muchas maneras, siendo el método de los momentos o los L-momentos y el método de máxima verosimilitud los más célebres, aunque técnicas Bayesianas que involucran cadenas de Markov empiezan a ganar adeptos en los últimos años.

En este estudio, el agente principal será el viento.

2.2 Modelos para el régimen central

La primera decisión fundamental, de cara a trabajar en un espacio paramétrico y poder utilizar las técnicas habituales de inferencia estadística para la estimación, es seleccionar una familia de distribuciones que represente de manera adecuada el régimen central de la distribución de velocidades de viento.

Como distribución que ajuste el cuerpo central, se ha seleccionado una distribución *Weibull* biparamétrica de parámetro de forma k y parámetro de escala λ . A continuación se procederá a justificar desde el punto de vista teórico - físico dicha elección y a ilustrar la elección con algunas referencias bibliográficas.

2.2.1 Fundamento teórico

Considérese el campo vectorial de velocidades del viento, en un punto específico, que define el emplazamiento de la planta ¹.

$$\mathbf{V}(x_1, x_2) = U_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + U_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2 \quad (2.2)$$

Se puede definir un tensor métrico (esto es, un tensor dos veces covariante simétrico y definido positivo) g sobre la superficie considerada S , de cara a poder definir distancias, ángulos etc. Sin entrar en el formalismo subyacente de la geometría diferencial, es apropiado referirse al módulo de la velocidad del viento, o de forma escueta, simplemente a la *velocidad del viento* definido mediante

$$V(x_1, x_2) = g(\mathbf{V}(x_1, x_2), \mathbf{V}(x_1, x_2)) \quad (2.3)$$

Esto es una forma de definir un producto escalar sobre la superficie considerada, por ello una métrica, y a partir de ella una norma, que es una función que adopta **valores reales** y por lo tanto, pueden ser medidos mediante instrumentación.

Más allá del rigor técnico, se está definiendo una forma de tratar la velocidad del viento, como valor escalar necesario para el cálculo de las fuerzas mediante la Ecuación 2.1). Este formalismo es necesario en cuanto que el hecho de que la superficie de la tierra no es isométrica al plano, introduce cierto error en los desarrollos posteriores, como se verá a continuación.

¹ A efectos de este estudio, se puede considerar dicho campo vectorial definido sobre una superficie S (variedad de dimensión 2) de acuerdo con las herramientas de geometría diferencial en variedades, despreciando los efectos del flujo ascendente/descendente, que corresponden a gradientes de densidad o temperatura

Vista como función $V : S \mapsto \mathbb{R}^+$, la velocidad del viento puede expresarse en un punto $(x_1; x_2)$ mediante $V(x_1, x_2)$, pero es más útil relacionar considerar la velocidad del viento mediante su expresión en las coordenadas locales dadas por la Ecuación (2.2) $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^+$

$$V = f(U_1, U_2) \quad (2.4)$$

Si se consideran ahora U_1 y U_2 variables aleatorias con soporte en \mathbb{R} , V será una variable aleatoria con soporte en \mathbb{R}^+ obtenida a partir de U_1 y U_2 mediante la función f . Caracterizar la variable aleatoria V por lo tanto consiste en

1. Caracterizar la variable aleatoria U_i , $i = 1, 2$.
2. Caracterizar la función f .

La primera cuestión es de índole física (meteorología), mientras que la segunda es una cuestión puramente geométrica (topografía).

Consideraciones físicas

Para caracterizar la física del problema, es necesario establecer una serie de hipótesis de índole físico. Dichas hipótesis son:

- **Isotropía meteorológica para un estado de fluctuación:** Las variables aleatorias U_i , $i = 1, 2$, para cierto estado de duración T en el que se consideran las fluctuaciones de dichas variables, tienen la misma varianza. Dicha hipótesis tiene sentido físico y ha demostrado ser válida para estados definidos en periodos de $T = 10$ min. En términos estadísticos, esto se conoce como **homocedasticidad**.
- **Desacoplamiento direccional:** La velocidad del viento en una dirección (dada por ejemplo por \mathbf{e}_1) no depende de la velocidad del viento en la otra dirección (dada en este caso por \mathbf{e}_2 y recíprocamente. Las variables aleatorias U_1 y U_2 , en términos estadísticos son **independientes**.
- **Simetría en la direccionalidad:** La variabilidad U_1 y U_2 debe producirse de forma simétrica (respecto al cero). Esto tiene sentido desde el punto de vista físico y complementa el principio de isotropía enunciado anteriormente. Estadísticamente, esto significa que las variables U_i , $i = 1, 2$ son **simétricas**, en el sentido que $\Pr[U_i > x] = \Pr[U_i < -x] \quad \forall x \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Obsérvese que esto implica que $\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_2] = 0$. En efecto, $\Pr[X > x] = \Pr[X < -x] \Rightarrow 1 - F(x) = F(-x)$ donde F es la función de distribución. Derivando ambas expresiones y utilizando la regla de la cadena se deduce que $f(x) = f(-x)$ y la función definida mediante $g(x) = xf(x)$ es impar, luego $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$.
- **Normalidad:** U_1 y U_2 son variables aleatorias cuyo valor responde al efecto agregado aditivo de muchas variables secundarias independientes, por lo tanto, gracias al teorema central del límite, ambas pueden suponerse **normalmente distribuidas**.

Todas estas hipótesis, pueden combinarse enunciando que $U_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ y son variables independientes.

Consideraciones geométricas

Caracterizar la geometría de la superficie del terreno, que es la que intrínsecamente proporciona la métrica y a efectos de este trabajo la expresión local de f es una tarea colosal, que además está vinculada al caso considerado, por lo que en general se establece la hipótesis siguiente

- **Geometría localmente isométrica al plano euclídeo:** La escala de trabajo es tan pequeña y la orografía tan suave y llana que puede suponerse que en un entorno del punto considerado, la geometría y la métrica son las de un plano euclídeo. En este caso, se puede suponer que, para cierto sistema de coordenadas ortogonales (que existe), en la Ecuación (2.4), $f(u_1, u_2) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Distribución de la velocidad del viento

Se ha visto que $V = f(U_1, U_2)$, por lo tanto, considerando que U_1 y U_2 son independientes y su distribución es conocida, se puede calcular la función de distribución de la variable V . En efecto, dado que U_1 y U_2 son independientes, $f_{(U_1, U_2)}(u_1, u_2) = f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2)$ con f_{U_i} función de densidad de una ley normal $\mathcal{N}(0, \sigma)$, luego, si se define $V = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u_1^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u_2^2}{2\sigma^2}} \delta(v - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}) du_1 du_2$$

$$f_V(v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2\sigma^2}} \delta(v - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}) du_1 du_2$$

Realizando el cambio a coordenadas polares, $u_1 = r \cos \theta$, $u_2 = r \sin \theta$ se obtiene

$$f_V(v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \delta(v - r) dr d\theta$$

$$f_V(v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_V(v) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

La distribución cuya función de distribución es $f(x) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$ se denomina habitualmente como distribución *Rayleigh*² y se denota por $\mathcal{R}(\sigma)$.

No obstante, se ha visto que para llegar a este punto, se han establecido una serie de hipótesis tanto del fenómeno físico como de carácter topográfico. Dichas hipótesis pueden no ser siempre estrictamente ciertas, en especial la del segundo grupo. La función de transformación puede ser algo más complicada. Para lidiar con este problema, es útil utilizar una familia de distribuciones de un espacio paramétrico mayor. Obsérvese que la familia de distribuciones *Rayleigh* es uniparamétrica y el único descriptor estadístico que la caracteriza es la fluctuación de las variables direccionales entre estados, identificada mediante la desviación típica σ .

La distribución *Weibull*³ responde a las necesidades planteadas. Su función de densidad puede parametrizarse mediante la expresión $f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$. λ es el llamado **parámetro de escala** y k es el llamado **parámetro de forma**, que introduce un nuevo grado de libertad al modelo. En efecto, obsérvese que para $k = 2$, se obtiene la distribución *Rayleigh* con $\lambda = \sqrt{2}\sigma$. Así, la familia *Weibull* constituye una generalización de la familia *Rayleigh*, que incluye la anterior, y permite mayor flexibilidad para considerar casos donde las hipótesis consideradas no sean totalmente ciertas. A la distribución *Weibull* de parámetro de forma k y parámetro de escala λ se la denotará $\mathcal{W}(k, \lambda)$.

2.2.2 Reseña bibliográfica

Antes de pasar a la descripción del régimen extremal, se hará una breve recopilación bibliográfica que secunda los razonamientos presentados anteriormente y muestra como la familia *Weibull* se antoja como adecuada para la modelización de la velocidad del viento.

En primer lugar, en [89] se presentan unos argumentos similares a los aquí expuestos para justificar el uso de la familia *Weibull*, presentando también las limitaciones del modelo, en cuanto a las hipótesis empleadas, en especial lo que en el artículo se define como *circularidad*, que es la conjunción de lo que aquí se ha denominado como isotropía y simetría.

Otros artículos como [49], presentan las familias *Rayleigh* y *Weibull* como adecuadas para la caracterización de la velocidad del viento, tal y como se hace en este estudio, enfatizando cuándo puede trabajarse con la familia uniparamétrica en lugar de con la biparamétrica.

En [77], los autores se basan en la consideración de la velocidad del viento distribuida según una *Weibull* y se detalla el proceso de ajuste de los parámetros. Más allá de los métodos de ajuste empleados, lo interesante es que se postula el modelo subyacente presentado en este documento y que además se presentan varios casos donde se observa la calidad de los ajustes a los datos medidos experimentalmente. En la misma línea,

² En honor a John William Strutt, 3er Baron Rayleigh, (12 de noviembre 1842 – 30 de junio de 1919), físico inglés

³ Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (18 de junio de 1887 – 12 de octubre de 1979 fue un ingeniero, científico y matemático sueco

en [15], relaciona los parámetros de la distribución *Weibull* con los momentos de la misma, que tienen una clara interpretación física (velocidad media, potencia media...) y se vuelven a presentar diferentes técnicas de ajuste de los parámetros, validadas para varias series temporales medidas en campo. Más artículos que se basan en el uso de la distribución *Weibull* para caracterizar la velocidad del viento son [25], [47], [55] y [70].

Por último, en [31] se presentan algunas alternativas recientes al uso de la distribución *Weibull*, que rechazan la hipótesis de la isotropía y/o la normalidad, así como el efecto de la topografía. Entre ellas cabe citar la familia *Rayleigh-Rice*, que es una generalización de la familia *Rayleigh* que no presupone las normales centradas en cero.

2.3 Modelos para el régimen extremal

Antes de preguntarse cuál es el modelo necesario para caracterizar el régimen extremal cabría preguntarse por qué es necesario hacerlo. La respuesta está en que, a pesar de que se ha caracterizado la velocidad del viento media y sus fluctuaciones, en algunas ocasiones se registran fenómenos extraordinarios que no corresponden con la misma población estudiada. Es el caso de macrofenómenos meteorológicos como pueden ser las tormentas o los huracanes. Las velocidades que se producen en esos momentos y que por lo tanto son registradas por los aparatos de medida corresponden a fenómenos físicos cuya escala es muy diferente, y que por lo tanto no pueden caracterizarse de la misma manera con la que se caracteriza la fluctuación de la velocidad media del viento para un estado determinado, cuyo periodo es $T = 10$ min. Estadísticamente, se dice que estos registros pertenecen a **otra población**.

La manera más sencilla de abordar el problema es usando el viejo lema *divide y vencerás*: en lugar de considerar un problema, se consideran dos, el correspondiente al régimen medio y el correspondiente al régimen extremal. Para el ajuste del régimen medio se usan ciertos modelos, diferentes a los usados para el ajuste del régimen extremal. Estadísticamente, se consideran diferentes las poblaciones asociadas a cada uno de estos regímenes, y para cada uno de ellos se utilizan los modelos y técnicas pertinentes.

Ahora sí, es necesario determinar qué función de distribución se va a escoger para ajustar la cola de la distribución.

Se ha seleccionado una distribución *Generalizada de Pareto* triparamétrica de parámetro de forma ξ , parámetro de escala σ y parámetro de localización u . A continuación se procederá a justificar desde el punto de vista teórico dicha elección y a ilustrarla con algunas referencias bibliográficas.

2.3.1 Fundamento teórico

El ingrediente principal que justifica el modelo utilizado para el análisis extremal, es el **segundo teorema fundamental de la teoría de valores extremos** o **teorema de Pickands–Balkema–De Haan**. Dicho teorema, consecuencia del **primer teorema fundamental de la teoría de valores extremos** o **teorema de Fisher–Tippett–Gnedenko** es un teorema que versa sobre el comportamiento de la variable aleatoria que se obtiene condicionando la variable aleatoria original a la superación de un umbral, suficientemente alto. Es por lo tanto un teorema de comportamiento asintótico, muy similar al teorema central del límite, pero para variables que caracterizan el régimen extremal en lugar del régimen medio.

Más específicamente.

Teorema 2.3.1 Sea X_1, X_2, \dots, X_n un conjunto de variables independientes e idénticamente distribuidas, cuya función de distribución es F (es decir, $\Pr[X_i \leq x] = F(x) \quad \forall i = 1, \dots, n$). Defínase la variable aleatoria E_u de excedencias de un cierto umbral u (su función de distribución será por tanto, si $y = x - u$, $G_u(y) = \Pr[X \leq u + y | X \geq u] = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}$). Entonces, si u es suficientemente grande, F pertenece al algún dominio de atracción⁴ y $n \rightarrow \infty$

⁴ Esta condición técnica sobre F es un poco engorrosa y se especifica con exactitud en la bibliografía que se introduce justo después de este teorema

$$G_u(y) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\sigma}, \quad y \geq 0, 1 + \xi \frac{y}{\sigma} \geq 0$$

La demostración de este teorema está fuera del alcance de este documento, aunque puede consultarse un esbozo de la misma en [24], tanto del primer teorema fundamental como del segundo teorema fundamental, sencillo a partir del primero. En [22] y [74] se presentan y discuten todas las hipótesis y se ilustra toda la casuística, así como aspectos más técnicos de la convergencia en ley.

La distribución de probabilidad cuya función de distribución es $F(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$ se conoce como *Distribución Generalizada de Pareto*⁵ y se denotará por $\mathcal{GP}(\xi, \sigma)$. Obsérvese que si se toma $\xi \rightarrow 0$, se obtiene como caso particular la *distribución exponencial* de parámetro de escala σ o ratio $1/\sigma$, $\mathcal{E}(1/\sigma)$.

El punto crítico en este resultado es la elección del umbral u , ya que significa adoptar un compromiso entre dos hipótesis del teorema

- Si u es muy alto, entonces el número de excedencias, no será muy alto y la convergencia en ley puede no estar garantizada.
- Si u es bajo, no se satisfacen las condiciones del teorema.

Además, otro problema importante que se tiene es que la asunción de que las muestras son independientes o idénticamente distribuidas no siempre es tan evidente. En muchas ocasiones se necesita un preproceso de los datos que utilice técnicas de desagrupación (*declustering*) o desestacionalización.

Por supuesto, todo lo expuesto puede aplicarse a la cola inferior de una distribución, sin más que cambiar la variable aleatoria X por su opuesta $X' = -X$. En este caso, las funciones de distribución y de densidad de probabilidad se obtienen haciendo $f_{X'} = -f_X(-x)$ y $F_{X'}(x) = F_X(-x)$.

2.3.2 Aplicación: el método de los picos sobre umbral

Con fines ilustrativos se describe a continuación el procedimiento más utilizado para realizar análisis de régimen extremal basado en el teorema anterior: el método de los picos sobre umbral, más conocido por sus siglas en inglés, P.O.T. (*Peaks Over Threshold*).

El método consiste en el algoritmo siguiente:

1. Selección de un umbral u (paso sujeto siempre a cierta subjetividad, aunque existen herramientas de apoyo).
2. Extracción de las n excedencias $x - u$ de entre los N datos originales. Las n excedencias deben ser mutuamente independientes, utilizando técnicas de desagrupación si es preciso.
3. Ajustar una distribución de la familia $\mathcal{GP}(\xi, \sigma)$, es decir, obtener unos valores de ξ y σ .
4. Calcular la probabilidad condicionada $\Pr[X \geq x | X \geq u] = 1 - F(x - u, \xi, \sigma)$, donde $F(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$ es la función de distribución de $\mathcal{GP}(\xi, \sigma)$.
5. Estimar la probabilidad no condicionada $\Pr[X \geq x] = \Pr[X \geq u] \Pr[X \geq x | X \geq u]$. El valor de $\Pr[X \geq u]$ es la probabilidad de superación del umbral. Es el tercer parámetro del modelo y se estima mediante $\theta = \frac{n}{N}$.
6. Obtención de los valores deseados: probabilidad de no excedencia, periodos de retorno, umbral de seguridad asociado a un periodo de retorno o a una probabilidad de no excedencia etc.

Este método es de uso común en ingeniería, especialmente en ingeniería marítima y en hidrología, como se verá en el apartado siguiente.

⁵ En honor de Wilfredo Federico Damaso Pareto (1848 - 1923), sociólogo, economista y filósofo italiano

2.3.3 Reseña bibliográfica

De nuevo, se hará una breve recopilación bibliográfica que secunda los razonamientos teóricos presentados anteriormente y muestra como la familia *Generalizada de Pareto* es adecuada para la modelización de las colas de la distribución de velocidades del viento.

En artículos como [26] se presenta el método y se aplica a estimación de caudales diarios y alturas de ola significativa. Otras referencias como [46], [64] y [51] ilustran la vasta aplicación del método en ingeniería marítima.

En cuanto a la selección del umbral, en [37] se analiza la influencia de dicha elección en el procedimiento, proponiendo algunas estrategias para la selección del mismo, basadas en consideraciones teóricas. En la misma línea, en [81] se establecen algunas normas de buena práctica y en [65] se propone la elección de un umbral dependiente del tiempo, dotando al modelo de cierta desestacionalización. Otros métodos que tratan de restar subjetividad a la elección del umbral son el Método Gráfico (*Graphical Method*, GM) [24] y la estimación óptima de sesgo robusto (*Optimal, Bias Robust Estimation*, OBRE) [32], [28], [29]. Existen otros métodos desarrollados recientemente que también tratan de automatizar el proceso de selección del umbral y liberarlo de la subjetividad humana [87].

2.4 Un modelo mixto para la caracterización de la velocidad del viento

Hasta ahora se ha presentado una metodología para estudiar la variable aleatoria de velocidades del viento V tanto para valores pertenecientes al cuerpo central (régimen medio) como para valores pertenecientes a las colas (régimen extremal). Para ambos casos, se han establecido hipótesis físicas verosímiles y robustas, que además se han contrastado con bibliografía específica de referencia.

De cara al estudio de la variable aleatoria, es entonces necesario establecer dos marcos diferentes, uno de régimen medio y uno de régimen extremal y ceñirse para cada análisis al marco oportuno. Este enfoque, no obstante, presenta principalmente dos inconvenientes, uno en su concepción y otro en su utilización:

1. En muchas ocasiones es muy difícil identificar cuál es el límite entre el régimen medio y el régimen extremal, resultando ser, al final, una decisión subjetiva y conveniente.
2. Considerar los dos regímenes por separado no permite abordar el problema de forma integral, en especial si se sitúa en un horizonte temporal. Imagínese por ejemplo (como será el caso en este estudio) que se pretende simular una serie temporal de velocidades de viento. Mediante este enfoque podría simularse una serie temporal de velocidades máximas anuales, por ejemplo, y una serie temporal de velocidades medias cada diez minutos. Las escalas temporales no coinciden, y en función de lo que se desee analizar, habrá que escoger entre una de las dos series sintéticas generadas para los análisis de rendimiento.

La manera de solventar este problema es considerar distribuciones de probabilidad mixtas, que consideren **simultáneamente** el régimen central y el régimen extremal.

2.4.1 Modelo

El modelo que se presenta, considera las dos poblaciones (datos medios y datos extremos) simultáneamente, tal y como han hecho algunos autores cuyos trabajos se presentaron al inicio de este capítulo. Sin embargo, es capaz de distinguir entre el régimen central al que pertenecen el grueso de los datos, un régimen maximal, al que pertenecen las velocidades extraordinariamente altas, que se deben a fenómenos meteorológicos diferentes (en escala y magnitud) y un régimen minimal, al que pertenecen las velocidades pequeñas (aunque menos significativas para el diseño estructural, caracterizar mejor las velocidades pequeñas mejora el ajuste global). Los umbrales que delimitan el límite entre estos dos regímenes son **parámetros del modelo** que deberán ser ajustados convenientemente, al igual que lo serán los otros parámetros.

Así, si F es la función de distribución asociada al modelo propuesto y f es la función de densidad, dichas función puede expresarse en función de las funciones de distribución o densidad de los regímenes medio (F_c y f_c respectivamente) maximal (F_M y f_M) y minimal (F_m y f_m) y de los umbrales límite, u_1 y u_2 mediante

$$f(x) = \begin{cases} f_m(x)F_c(u_1) & \text{si } x < u_1 \\ f_c(x) & \text{si } u_1 \leq x \leq u_2 \\ f_M(x)(1 - F_c(u_2)) & \text{si } x > u_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$F(x) = \begin{cases} F_m(x)F_c(u_1) & \text{si } x < u_1 \\ F_c(x) & \text{si } u_1 \leq x \leq u_2 \\ F_c(u_2) + F_M(x)(1 - F_c(u_2)) & \text{si } x > u_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Es directo comprobar que la función f es realmente una función de densidad de probabilidad ($f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\int_{\mathbb{R}^+} f(x) dx = 1$) y F es realmente una función de distribución (es no decreciente, continua por la derecha y sus límites en $-\infty$ y $+\infty$ son respectivamente 0 y 1). Evidentemente, $F'(x) = f(x)$.

Ya se ha hecho la elección del modelo para el régimen medio y para el régimen extremal, que no es otra cosa que establecer la expresión paramétrica de las funciones F_m , F_c y F_M o análogamente f_m , f_c y f_M . En el caso del presente estudio se ha establecido que el régimen medio se modelizaría mediante una distribución *Weibull* $\mathcal{W}(k, \lambda)$ y el régimen extremal mediante una distribución *Generalizada de Pareto* $\mathcal{GP}(\xi, \sigma)$ para las excedencias $y = x - u$, donde u es el umbral seleccionado que será u_2 respecto a X para el régimen maximal y u_1 respecto a $-X$ para el régimen minimal. Por consiguiente:

$$F_c(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad (2.7)$$

$$f_c(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad (2.8)$$

$$F_m(x) = \left(1 - \xi_1 \frac{x - u_1}{\sigma_1}\right)^{-1/\xi_1} \quad (2.9)$$

$$f_m(x) = \frac{1}{\sigma_1} \left(1 - \xi_1 \frac{x - u_1}{\sigma_1}\right)^{-\frac{1}{\xi_1} - 1} \quad (2.10)$$

$$F_M(x) = 1 - \left(1 + \xi_2 \frac{x - u_2}{\sigma_2}\right)^{-1/\xi_2} \quad (2.11)$$

$$f_M(x) = \frac{1}{\sigma_2} \left(1 + \xi_2 \frac{x - u_2}{\sigma_2}\right)^{-\frac{1}{\xi_2} - 1} \quad (2.12)$$

Así las cosas, el modelo mixto es un modelo a priori de 8 parámetros, a saber λ , k , u_1 , ξ_1 , σ_1 , u_2 , ξ_2 y σ_2 . Además, para la cola inferior $u_1 + \sigma_1/\xi_1 \leq x \leq u_1$ si $\xi_1 < 0$ y $x \leq u_1$ si $\xi_1 > 0$. Análogamente, para la cola superior $u_2 \leq x \leq u_2 - \sigma_2/\xi_2$ si $\xi_2 < 0$ y $x \geq u_2$ si $\xi_2 > 0$. Podría considerarse este modelo directamente, no obstante, la experiencia arroja que para variables geofísicas, no suelen darse discontinuidades en las funciones de densidad que las representan: esto significa que la transición entre el régimen central y extremal, aunque existe, es suave. Dicho de otro modo, la probabilidad de no excedencia crece de forma continua, sin presentar saltos en su crecimiento en un punto en concreto. Esta asunción, aunque no es imprescindible para realizar los análisis tiene una ventaja principal, y es que al introducir matemáticamente una *realidad física* basada en la experiencia, aporta información al modelo y reduce la incertidumbre, en este caso, imponiendo una relación de continuidad que reduce en 2 el número de parámetros del modelo.

Imponiendo la continuidad de la función de densidad f para la cola inferior:

$$\begin{aligned}
 f(u_1) &= \lim_{x \rightarrow u_1^-} f(u_1) \\
 f_c(u_1) &= \lim_{x \rightarrow u_1^-} f_m(x) F_c(u_1) \\
 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{u_1}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} &= \lim_{x \rightarrow u_1^+} \left[\frac{1}{\sigma_1} \left(1 - \xi_1 \frac{x - u_1}{\sigma_1} \right)^{-\frac{1}{\xi_1} - 1} \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \right) \right] \\
 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{u_1}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} &= \frac{1}{\sigma_1} \left(1 - e^{-\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} \right) \\
 \frac{k}{\lambda^k} u_1^{k-1} &= \frac{1}{\sigma_1} \left(e^{\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

De donde, el parámetro de escala de la cola inferior, depende del umbral inferior y de los parámetros de forma y de escala del régimen central mediante la expresión:

$$\sigma_1 = \left(\frac{\lambda}{u_1} \right)^k \frac{u_1}{k} \left(e^{\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} - 1 \right) \quad (2.13)$$

Para la cola superior se impone también la continuidad de la función de densidad f :

$$\begin{aligned}
 f(u_2) &= \lim_{x \rightarrow u_2^+} f(u_2) \\
 f_c(u_2) &= \lim_{x \rightarrow u_2^+} f_M(x) (1 - F_c(u_2)) \\
 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{u_2}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{u_2}{\lambda}\right)^k} &= \lim_{x \rightarrow u_2^+} \left[\frac{1}{\sigma_2} \left(1 + \xi_2 \frac{x - u_2}{\sigma_2} \right)^{-\frac{1}{\xi_2} - 1} \left(1 - (1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}) \right) \right] \\
 \frac{k}{\lambda} \left(\frac{u_2}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{u_2}{\lambda}\right)^k} &= \frac{1}{\sigma_2} e^{-\left(\frac{u_2}{\lambda}\right)^k} \\
 \frac{k}{\lambda^k} u_2^{k-1} &= \frac{1}{\sigma_2}
 \end{aligned}$$

De donde, el parámetro de escala de la cola superior, depende del umbral y de los parámetros de forma y de escala del régimen central mediante la expresión:

$$\sigma_2 = \left(\frac{\lambda}{u_2} \right)^k \frac{u_2}{k} \quad (2.14)$$

Por último, otra realidad física es que la velocidad del viento es una variable positiva, luego no tiene sentido que la cola se extienda más allá del 0. Se dice que la cola inferior es una cola finita, de donde, de la relación $u_1 + \sigma_1/\xi_1 \leq x \leq u_1$ que sirve para $\xi_1 < 0$ se obtiene

$$\sigma_1 = -u_1 \xi_1 \quad (2.15)$$

Combinando la Ecuación (2.14) con la Ecuación (2.15) se puede expresar tanto el parámetro ξ_1 como el parámetro σ_1 en función del umbral.

En definitiva, el modelo final, consta por lo tanto de 5 parámetros, a saber, u_1 , k , λ , u_2 y $\xi = \xi_2$. Los parámetros ξ_1 , σ_1 y σ_2 se obtienen a partir de los anteriores mediante las expresiones:

$$\xi_1 = -\frac{1}{k} \left(\frac{\lambda}{u_1} \right)^k \left(e^{\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} - 1 \right) \quad (2.16)$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{\lambda}{u_1} \right)^k \frac{u_1}{k} \left(e^{\left(\frac{u_1}{\lambda}\right)^k} - 1 \right) \quad (2.17)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\lambda}{u_2} \right)^k \frac{u_2}{k} \quad (2.18)$$

2.4.2 Método de ajuste

Para el ajuste de los parámetros a partir del modelo las técnicas más célebres son el método de los **momentos** (o su versión en estadística de orden, los **L-momentos**, ver Apéndice A) y el método de **máxima verosimilitud**. Debido a que el modelo considerado es tetraparamétrico y no corresponde con ninguno de los modelos más habituales, sino que es un modelo mixto, el método de los momentos, habitualmente sencillo, resulta considerablemente tedioso. Además, el método de máxima verosimilitud (MLE), bajo condiciones muy generales, garantiza la consistencia, eficiencia y normalidad asintótica de los estimadores [76], [24], además de la siempre deseable invarianza funcional. Por estas razones se ha optado en este estudio por el método de máxima verosimilitud.

La función de verosimilitud asociada al modelo para una muestra de tamaño N es

$$\mathcal{L}(\lambda, k, u_1, u_2, \xi | x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f(x_i) \quad (2.19)$$

Considerando ahora la función de log-verosimilitud, $l(\lambda, k, u_1, u_2, \xi | x_1, \dots, x_N) = \ln(\mathcal{L}(\lambda, k, u_1, u_2, \xi | x_1, \dots, x_N))$, se obtiene, tras la operativa pertinente usando las Ecuaciones (2.5), (2.7), (2.9) y (2.9) y recordando las expresiones de los parámetros ξ_1 , σ_1 y σ_2 mediante las Ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18).

La expresión analítica de la función de log-verosimilitud no se escribe aquí por ser desmesuradamente compleja, aunque queda perfectamente definida aplicando el logaritmo neperiano a la Ecuación (2.19) y evaluando cada término según $x_i < u_1$, $u_1 \leq x_i \leq u_2$ o $x_i > u_2$ de acuerdo con las expresiones pertinentes, en función de los parámetros del modelo. Es equivalente maximizar la función de verosimilitud que minimizar el opuesto de la función log-verosimilitud, comunmente denominada NLLF (*negative log-likelihood function*).

Dicha minimización puede realizarse mediante cualquier software de cálculo numérico. En el caso del presente documento se ha utilizado la `fminunc` del software MATLAB®.

2.4.3 Aplicación a una serie de datos meteorológicos

Para comprobar la validez del modelo se han utilizado los datos de la velocidad del viento sobre la superficie de la tierra a 10 metros de altura, muestreada cada 6 horas, y correspondiente a la media mensual de la velocidad en ese instante del día⁶, en un punto del Sahara con una resolución de 0.7° tanto en latitud como en longitud, obtenidos a partir de técnicas de reanálisis ERA [90] por el *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) [1]. Los datos pueden encontrarse en la propia web del ECMWF.

De cara a ilustrar la potencia del método, se han realizado dos análisis:

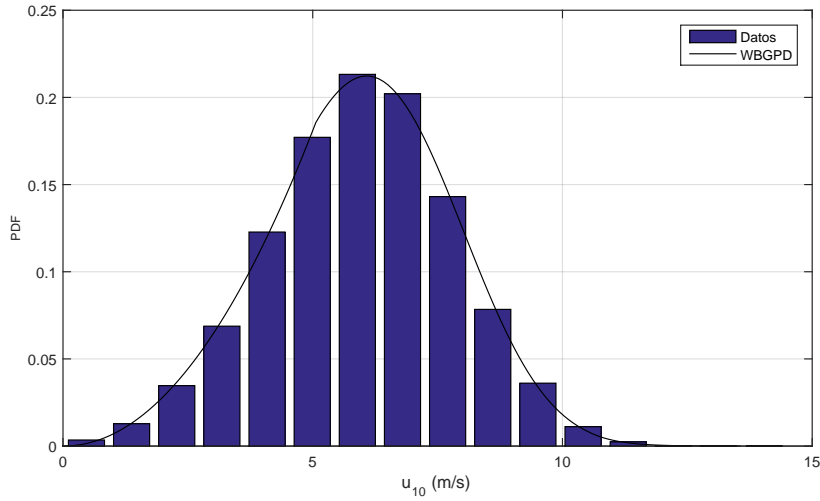
1. Un análisis de régimen medio, en el que se comparan los datos empíricos medidos con dos modelos de ajustes, el modelo mixto *Weibull - Pareto* que denominaremos **WBGPD** y un modelo clásico *Weibull*, que denominaremos **WB**.
2. Un análisis de régimen extremal, mediante el método P.O.T., utilizando el umbral u_2 obtenido mediante el modelo WBGPD, de cara al análisis de los periodos de retorno altos⁷.

Régimen medio

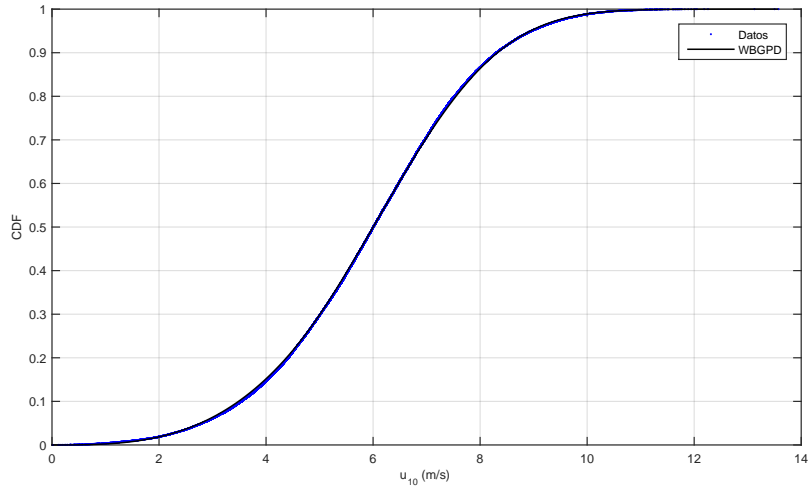
En la Figura 2.1 se ilustra el histograma de los datos y la función de distribución empírica de los datos $\tilde{F}(x_{(i)}) = \frac{i}{N+1}$, donde x_i identifica el i -ésimo estadístico de orden de entre los N datos comparados con la función de densidad de probabilidad y de distribución del modelo WBGPD. Puede observarse que el ajuste es muy bueno para el modelo WBGPD.

⁶ Aunque la velocidad del viento se considera estacionaria para periodos de promediado de $T = 10$ min, pueden utilizarse periodos mayores, a efectos de simple validación del modelo

⁷ Recuérdese que el periodo de retorno está asociado a la probabilidad de no excedencia anual p mediante $p = 1 - \frac{1}{T}$



(a) Función de densidad de probabilidad.



(b) Función de distribución.

Figura 2.1 Comparación de los datos medidos con el modelo paramétrico.

En la Figura 2.2 se muestran de nuevo las funciones de la Figura 2.1 pero añadiendo el modelo WB. Se observa que si bien el modelo WB ya era bastante adecuado para tratar el régimen medio (de acuerdo a como se comentó en la reseña bibliográfica sobre métodos para el ajuste del clima medio, Sección 2.2.2), el mejor ajuste de las colas, en especial de la cola inferior, mejora globalmente el ajuste, no sólo en las colas de la distribución.

Otras herramientas visuales muy utilizadas para la verificación de ajustes estadísticos son la prueba de probabilidad (*P-P plot*), la prueba de cuantil (*Q-Q plot*) y el papel probabilístico [59], [24]. La Figura 2.3 muestra el *P-P plot* y el *Q-Q plot* para ambos modelos y la Figura 2.4 muestra los datos y el modelo WBGDP en un graduado tipo *Weibull*. En él, la distribución *Weibull* se representa mediante una línea recta.

Se observa que el modelo WBGDP no sólo ajusta muy bien los datos de la muestra, sino que mejora los resultados obtenidos mediante el modelo WB, especialmente para la cola inferior.

Cabría preguntarse si, teniendo en cuenta que las mayores discrepancias entre ambos modelos se presentan en la cola inferior, que corresponde con velocidades no peligrosas dentro de un análisis de cargas sobre

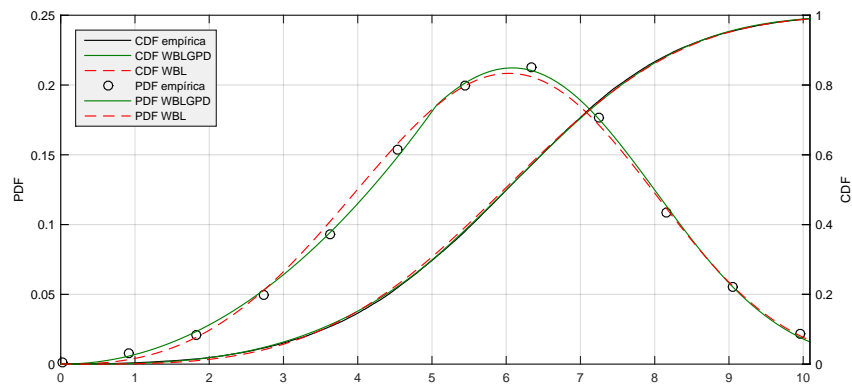


Figura 2.2 Comparación de los modelos WB y WBLGPD para el ajuste de los datos registrados.

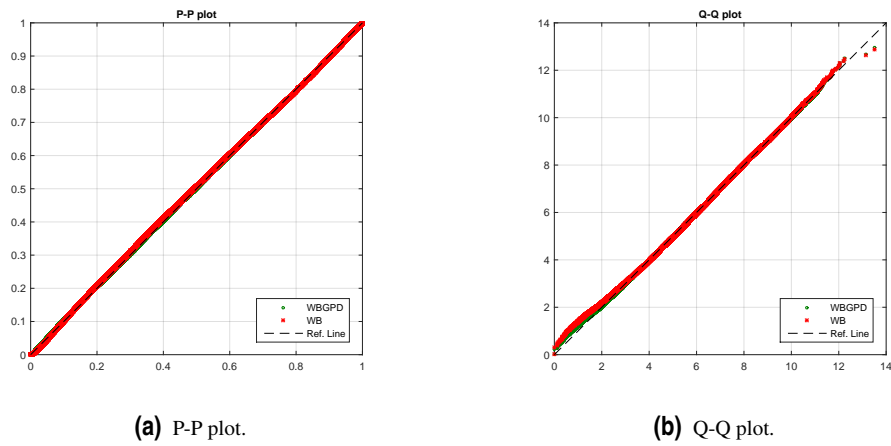


Figura 2.3 Comparación de los modelos WB y WBLGPD para el ajuste de los datos registrados mediante gráficas de probabilidad P-P plot y Q-Q plot.

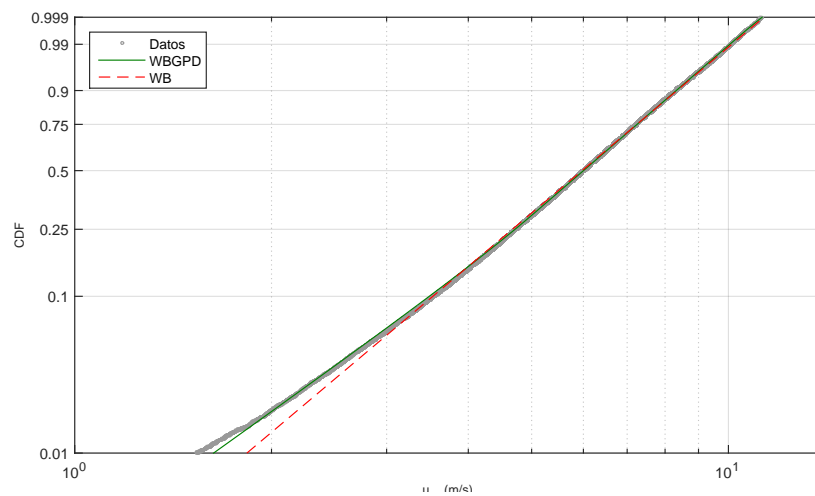


Figura 2.4 Datos registrados y modelo WBLGPD en un papel probabilístico de tipo Weibull.

estructuras, merece la pena establecer este modelo o si por el contrario se están gastando inútilmente recursos computacionales.

La respuesta es que sí, que merece la pena. Postulando que el modelo paramétrico es el modelo WB para toda la población, se está imponiendo el valor del parámetro de forma de la cola superior. En efecto, considerando la variable aleatoria E_u de excedencias de un cierto umbral u , cuya función de distribución es $G_u(y) = \frac{F(u+y)-F(u)}{1-F(u)}$. Se obtiene:

$$\begin{aligned} G_u(y) &= \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \\ G_u(y) &= \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{u+y}{\lambda}\right)^k}\right) - \left(1 - e^{-\left(\frac{u}{\lambda}\right)^k}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{u}{\lambda}\right)^k}\right)} \\ G_u(y) &= 1 - e^{-\left[\left(\frac{u+y}{\lambda}\right)^k - \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k\right]} \\ G_u(y) &= 1 - e^{-\left[\left(\frac{u}{\lambda}\right)^k \left(1 + \frac{y}{u}\right)^k - 1\right]} \end{aligned}$$

Ahora, en el límite, en el que podemos suponer $y \ll u$, se verifica $\left(1 + \frac{y}{u}\right)^k \simeq 1 + k\frac{y}{u}$, de donde

$$G_u(y) \simeq 1 - e^{-k\left(\frac{u}{\lambda}\right)^k \frac{y}{u}} \quad (2.20)$$

La Ecuación (2.20) indica que E_u sigue, en el límite una ley dada por la familia *Exponencial* de parámetro de escala $\kappa = \frac{u}{k} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^k$ ($\mathcal{E}(1/\kappa) = \mathcal{E}(\Lambda)$), si se parametriza en función del ratio $\Lambda = 1/\kappa$. Esta ecuación no sólo especifica el parámetro de forma $\sigma_2 = \kappa$ (algo que por otra parte ya se vio en la Ecuación (2.15)) en función del umbral escogido, sino que corresponde con una distribución *Generalizada de Pareto* en la que $\xi_2 = 0$ y $\sigma_2 = \kappa$. $\mathcal{GP}(0, \kappa)$. El parámetro de forma $\xi = \xi_2 = 0$ determina completamente la cola de la distribución (se dice que la distribución padre, la familia *Weibull* pertenece a la familia de colas exponenciales), por lo tanto con el modelo WB no se podrían capturar fenómenos aleatorios que tuvieran una cola superior diferente.

Por ejemplo, para los datos del Sahara, el ajuste de máxima verosimilitud arroja

$$\begin{aligned} u_1 &= 5.0676 \text{ m/s} \\ u_2 &= 10.4725 \text{ m/s} \\ \lambda &= 6.6312 \text{ m/s} \\ k &= 3.6731 \\ \xi &= -0.0625 \end{aligned}$$

Y además, de las Ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.3299 \\ \sigma_1 &= 1.6716 \text{ m/s} \\ \sigma_2 &= 0.5322 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Puede verse que aunque ξ es pequeño, $\xi \neq 0$. Es más, $\xi < 0$, de donde la variable aleatoria de excedencias tiene una cola finita ($x \leq u_2 - \sigma_2/\xi_2 \Rightarrow x \leq 15.5395 \text{ m/s}$), es decir, la cola de la variable original es menos pesada que la de una distribución *Weibull*. Esto queda todavía más de manifiesto si se analiza el régimen extremal.

Régimen extremal

A continuación se procederá al análisis de los mismos datos pero utilizando el método P.O.T. para analizar el régimen extremal, es decir, los eventos que corresponden a periodos de retorno muy grandes.

Obsérvese que, de acuerdo con el análisis anterior, el umbral u no debe escogerse de acuerdo con métodos más o menos subjetivos, como se comentó en la reseña bibliográfica sobre métodos de ajuste para el clima extremal, Sección 2.3.3, sino que se corresponde con el parámetro del modelo, obtenido por máxima verosimilitud, $u = u_2$.

En primer lugar, en la Figura 2.5 se muestra la serie temporal de datos registrados, identificando los datos de la población que superan el umbral u .

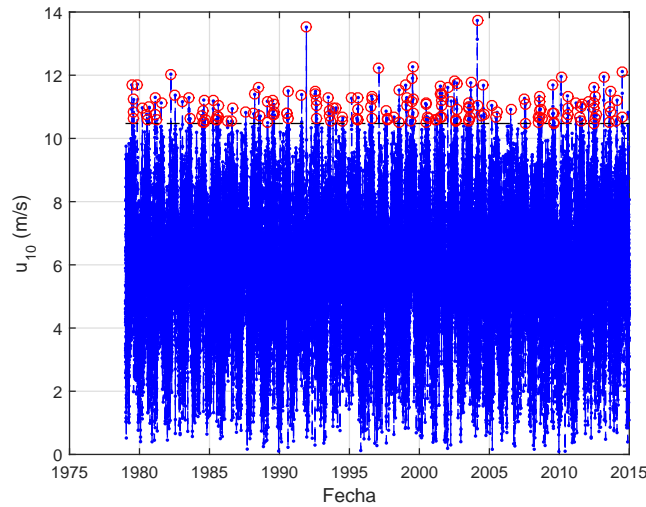


Figura 2.5 Datos registrados que superan el umbral u .

De acuerdo con el método descrito en la Sección 2.3.2, se ajusta una distribución condicionada a la superación del umbral de tipo *Generalizada de Pareto*. Los parámetros de ajuste obtenidos son

$$\begin{aligned}\xi &= -0.0536 \\ \sigma &= 0.5281 \text{ m/s} \\ \theta &= 0.0048\end{aligned}$$

Como puede observarse, ξ y σ se acercan a los obtenidos mediante el modelo pentaparamétrico mixto WBGPD y además $\xi \neq 0$. En la Figura (2.6) se muestra la función de distribución empírica de las excedencias y la función de distribución teórica correspondiente a la $\mathcal{GP}(\xi, \sigma)$ ajustada según el método P.O.T. y la obtenida para el modelo mixto WBGPD. En la Figura (2.7) se representan ambos modelos utilizando las gráficas de probabilidad P-P y Q-Q.

Se observa que el modelo WBGPD ajusta convenientemente las excedencias del umbral, aunque, evidentemente, el ajuste exclusivo de las excedencias mediante el método P.O.T. ajusta mejor las excedencias: esto es natural, ya que el modelo mixto WBGPD utiliza información de toda la muestra para ajustar la distribución, mientras que el modelo ajustado mediante P.O.T. sólo usa la información de las excedencias y el resultado es más satisfactorio. No olvidemos, sin embargo, que el método P.O.T. no permite hacer hipótesis alguna sobre el régimen medio de la distribución, cosa que sí hace el modelo WBGPD.

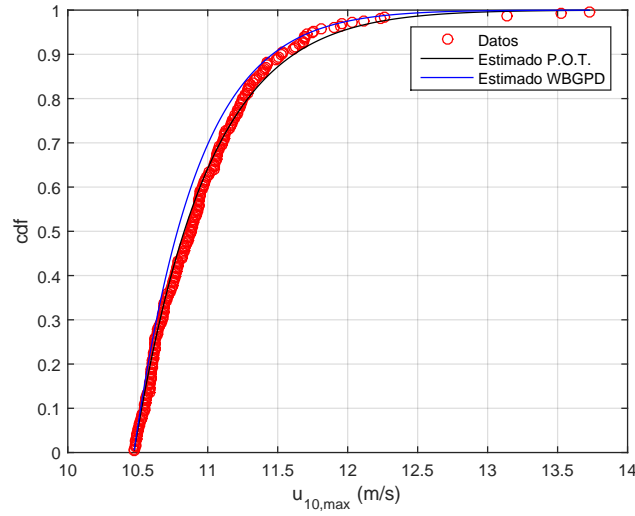


Figura 2.6 Función de distribución empírica de las excedencias del umbral u comparadas con el modelo *Generalizado de Pareto* ajustado mediante P.O.T. y el modelo WBGPD.

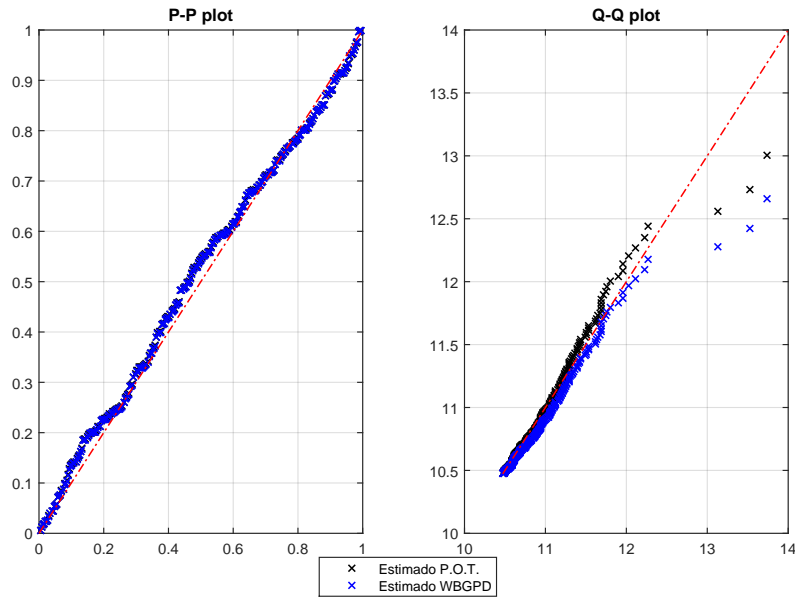


Figura 2.7 Diagramas P-P plot y Q-Q plot para las excedencias del umbral u comparadas con el modelo *Generalizado de Pareto* obtenido mediante P.O.T. y el modelo WBGPD.

Para estimar los periodos de retorno altos, se debe introducir también la estimación de la probabilidad de superación del umbral $\theta = n/N = 0.0048$ mediante el método P.O.T. y calcular la distribución no condicionada. Para representar la distribución no condicionada, suele ser muy ilustrativo el **Diagrama de Gumbel** o **Diagrama de Periodos de Retorno**, que enfatiza el ajuste para probabilidades de superación muy pequeñas, es decir, para periodos de retorno muy altos [74], [24]. En dicho diagrama, se dibuja el cuantil V_T asociado a un determinado periodo de retorno T , relacionado con la probabilidad de no superación mediante $p = 1 - 1/T$, con el eje de abscisas graduado logarítmicamente. Así, se obtiene, de la definición del periodo de retorno y utilizando la expresión condicionada de las excedencias $\Pr[X \leq x | X \geq u]$ y la probabilidad de

superación $\theta = \Pr[X \geq u]$

$$\frac{1}{T} = \theta \left[1 + \xi \left(\frac{V_T - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \quad (2.21)$$

Despejando el valor de V_T se obtiene

$$V_T = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[(\theta T)^\xi - 1 \right] \quad (2.22)$$

La Ecuación (2.22) aparece representada para el ajuste de los datos del Sahara en la Figura 2.8, junto con los datos registrados que superan el umbral u . En dicha figura, aparece también representada la estimación usando el modelo mixto WBGPD. Se han representado además de las estimaciones, los intervalos de confianza al 95 % para ambos modelos, calculados mediante el **método delta**, considerando la incertidumbre de los parámetros del modelo ξ , θ y σ ⁸, tal y como se describe en [24]. Obsérvese que en el caso límite en que $\xi = 0$ (que no olvidemos correspondería con el caso en el que la familia fuera exactamente una distribución de tipo *Weibull*, tomando límites en la Ecuación (2.22) se obtiene

$$V_T = u + \sigma \ln(\theta T) = u + \sigma \ln(\theta) + \sigma \ln(T) \quad (2.23)$$

La Ecuación (2.23) en el plano $(\ln(T); V_T)$ corresponde con la de una recta de pendiente σ y ordenada en el origen $u + \sigma \ln(\theta)$, por lo tanto, en el caso en el que $\xi = 0$, el diagrama de periodos de retorno debería mostrar una línea recta.

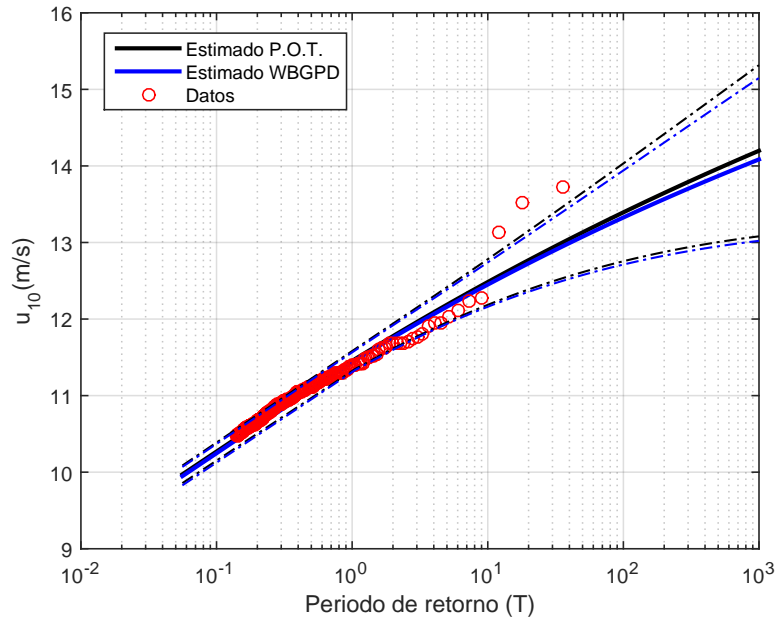


Figura 2.8 Diagrama de Periodos de Retorno para el modelo obtenido y los datos registrados.

Vemos que los datos se ajustan bastante bien a la curva teórica y que únicamente tres velocidades del viento, extremadamente altas, escapan del intervalo de confianza al 95 % para ambos modelos. Se trata de eventos atípicos extraordinarios muy difíciles de capturar incluso con el método ajustado mediante P.O.T. El modelo mixto WBGPD, por lo tanto, se antoja prácticamente igual de válido que los métodos clásicos para el ajuste de las colas.

⁸ Podría haberse incluido también la incertidumbre del parámetro u , puesto que mediante el método de máxima verosimilitud dicha incertidumbre puede estimarse, pero esta incertidumbre es casi despreciable frente a los otros parámetros del modelo, como puede verse en [82] y [83]

Conclusiones

Se ha observado que el modelo mixto WBGPD mejora el modelo WB para la caracterización del régimen medio y posee una potencia comparable al método P.O.T. para el ajuste del régimen extremal de la velocidad del viento.

El ajuste del cuerpo central de la distribución mediante una familia *Weibull* se ha demostrado válido, pero considerar el régimen extremal de la misma población supondría asumir que la cola de la distribución es de tipo exponencial, con parámetro de forma conocido. Por otro lado, el ajuste de las colas mediante la técnica clásica de P.O.T. es mucho más satisfactoria para lidiar con eventos extremos, pero no aporta nada de información sobre el régimen central.

El método propuesto, basado en una distribución mixta *Weibull - Pareto*, WBGPD es novedoso en cuanto permite, como se viene buscando, un **enfoque integral** del problema, caracterizando la variable aleatoria en su conjunto, de cara a, como se verá más adelante, realizar eventuales simulaciones.

3 Caracterización del coeficiente de fuerzas

A good scientist is a person with original ideas. A good engineer is a person who makes a design that works with as few original ideas as possible. There are no prima donnas in engineering.

FREEMAN DYSON, 1923

En el Capítulo 1 se presentó el **modelo probabilístico C-V** que se usará para tratar las variables ambientales que intervienen en el problema de caracterización de las cargas aleatorias que actúan sobre una estructura que soporta paneles fotovoltaicos. La ecuación fundamental establecida era

$$F_i(t) = \frac{1}{2} C_{F_i}(t) \rho A V^2 \quad (3.1)$$

Donde F_i es la variable aleatoria que representa la fuerza de sollicitación estructural en el grado de libertad i -ésimo, $C_{F_i}(t)$ es el proceso estocástico que representa la historia del coeficiente de presiones asociado al grado de libertad i , ρ y A son el área del objeto expuesto y la densidad del aire y V es la variable aleatoria que representa la velocidad del viento.

Este capítulo versa sobre el modelo utilizado para el proceso estocástico $C_{F_i}(t)$. Por simplificar la notación, de ahora en adelante se prescindirá del subíndice F_i , de forma que se escribirá únicamente $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, donde n es el número de grados de libertad excitados de la estructura, que corresponden a K nodos del plano, $n = 2K$. Al final del mismo, se propone un ejemplo de aplicación muy útil desde el punto de vista computacional: la reducción del tiempo de simulación en el cálculo de cargas de viento.

3.1 Un modelo para la caracterización del coeficiente de fuerzas

En este capítulo se propondrá un modelo ajustado para el proceso $C_i(t)$ *ad-hoc*. Esto significa que no se pretende que el modelo sea universal y válido para unas condiciones generales, sino que es prácticamente instrumental. Además, como se verá en el Capítulo 4, la influencia de la incertidumbre en la variable aleatoria $C_i(t)$ es marginal si se compara con la de la variable aleatoria V , por lo tanto el método propuesto, aunque no exento de algunas hipótesis algo discutibles, se antoja suficiente para el objetivo del estudio.

Por un lado, el interés de considerar el término $C_i(t)$ como vector aleatorio (es decir, para cada i se dispone de una variable aleatoria) permite tratar desde el punto de vista probabilístico conceptos como la simultaneidad de acciones, tan conflictivas y subjetivas en el ámbito de la ingeniería civil. Usualmente, en las normativas clásicas [38], [40], [30] consideran coeficientes de simultaneidad Ψ_i que ponderan el valor de las variables aleatorias para lidiar con este problema, pero el valor de dichos coeficientes no deja de ser opaco e incluso oscuro en muchos de los casos y desde luego, no universal como en ocasiones se pretende dado el carácter normativo, ni está adaptado para los casos específicos de un estudio en concreto. La única forma verdaderamente rigurosa de lidiar con la simultaneidad es desde el punto de vista probabilístico, tratando con vectores aleatorios y el concepto de dependencia entre variables. Tendencias recientes muestran nuevos

enfoques para abordar la dependencia de variables usando **Cóputas** [59], [74]. En este estudio, no obstante, no se pretende ser tan ambicioso y el marco de estudio no sobrepasará la teoría lineal de los **Modelos Vectoriales Autorregresivos**, basados en un indicador lineal de la dependencia: la covarianza.

Además, el interés de considerar el término $C_i(t)$ no sólo como vector aleatorio, sino como proceso estocástico en el tiempo va más allá de la ambición de tener un modelo más rico estructuralmente. Se pretende, capturar las fluctuaciones temporales de las fuerzas sobre la estructura, por dos motivos:

1. Aunque más adelante, en el Capítulo 5 se verá que el modelo estructural empleado se calcula en régimen *cuasi - estático*, es deseable que el marco de trabajo sea lo más general posible (de cara, por ejemplo, a futuras consideraciones, en régimen dinámico), por lo tanto es imprescindible capturar los efectos dinámicos.
2. Debido al enorme coste computacional de una simulación CFD mediante cualquier software específico, en este caso XFlow®, en la práctica es muy difícil disponer de más de un cálculo de coeficientes de presiones, por lo que la variabilidad intrínseca a la turbulencia no puede calcularse realizando un estudio estadístico en las muestras de realizaciones. La estadística debe poder capturarse a partir de una sola realización. Aquí, las hipótesis del modelo (estacionaridad y ergodicidad) resultarán claves para el ajuste y necesitarán de un proceso muestreado en el tiempo [67].

Para el estudio de procesos estocásticos vectoriales en el que la dependencia se modela linealmente, la rama de la estadística matemática que casa perfectamente es la **Teoría de Series Temporales**. Textos de referencia sobre series temporales (fundamentos teóricos, métodos de ajuste y aplicaciones) son [48], donde puede encontrarse una aproximación teórica que cubre todos los conceptos, y [62], muy orientado a la resolución de problemas, especialmente en el ámbito económico. Por último en [42] puede encontrarse un enfoque más basado en técnicas espectrales.

En la primera sección de este capítulo se realizará un análisis exploratorio de los datos, de cara a orientar el desarrollo hacia la concepción de un modelo robusto. Posteriormente se sentarán las bases rigurosas del modelo, de acuerdo con las conclusiones obtenidas. En tercer lugar se precisarán los métodos numéricos utilizados para el ajuste de los parámetros del modelo probabilístico (propiedades estadísticas) y de la dependencia temporal (propiedades espectrales). Finalmente, se presentarán algunas gráficas y resultados que demuestren que el modelo utilizado es adecuado para caracterizar los datos disponibles.

3.1.1 Análisis exploratorio

Datos utilizados

Se utilizan como datos de partida los resultados de la simulación de XFlow a los que se hizo referencia en el Capítulo 1. Se trata de $n = 14$ series temporales, muestreadas a una frecuencia de $f = 270.27\text{ Hz}$, es decir, cada $\Delta t = 0.0037\text{ s}$. La duración de la simulación debería ser el intervalo característico en el que se supone que la velocidad del viento es estacionaria, es decir $T = 10\text{ min}$.

Sin embargo, la simulación, al hacerse en régimen transitorio, presenta en los primeros instantes un comportamiento diferente, debido a que inicialmente, el viento entra en carga con el obstáculo, presentándose cargas mayores y variaciones más abruptas de las mismas. Este fenómeno, no obstante, no existe en la vida real, puesto que la estructura ya está instalada en un ambiente de cargas de viento. Dicho de otro modo, es necesario que la simulación numérica llegue a un régimen permanente. Se ha comprobado que a partir de $t = 5\text{ min}$ (incluso mucho antes), el régimen puede considerarse permanente. Así, para los ajustes únicamente se han utilizado los datos correspondientes a los últimos cinco minutos de la simulación, es decir, $T' = 300\text{ s}$. Como se ve en los análisis posteriores, es un intervalo suficientemente grande para capturar la estadística del fenómeno. En total son $N = 41003$ muestras para cada serie.

Carácter del proceso

En primer lugar se definen los estadísticos muestrales temporales, para las series temporales de C_i

$$\mu_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_i(t_j) \quad m \leq N$$

$$\sigma_i(m) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (C_i(t_j) - \mu_i(m))^2 \quad m \leq N$$

En las Figura 3.1 pueden observarse la evolución de los estadísticos μ_i (Media) y σ_i (Desviación típica) muestrales para las primeras muestras, tomadas de 100 en 100, es decir, para $m = 100, 200, \dots$ hasta que los valores se estabilizan. Se observa que en todos los casos, para m suficientemente grande, los valores de $\mu_i(m)$ y $\sigma_i(m)$ si $m \rightarrow N$ estabilizan cualquiera que sea el valor de $i = 1, \dots, n$.

La Figura 3.2, muestra para las 14 series, las medias móviles suavizadas cada $L = 500$ y $L = 5000$ muestras. Se observa que, en consonancia con la Figura 3.1 que conforme aumentamos la muestra, el valor de los estadísticos converge. Parece que sería razonable suponer el proceso **estacionario en el sentido débil** (ver Apéndice A) y **ergódico**.

Análisis estadístico univariado

Se analiza ahora la distribución de las muestras correspondientes a cada una de las series temporales, es decir, para cada una de las variables $C_i(t)$ se considera la muestra $\{C_i(t_j)\}_{j=1, \dots, N}$.

En la Figura 3.3 se muestra, para cada serie:

- Un histograma de los datos.
- El diagrama en caja de los datos.
- La función de densidad suavizada, usando un núcleo suavizador normal cada $L = 100$ puntos.
- El $Q-Q$ plot respecto a la distribución normal.

A la vista de los resultados, se puede observar que el proceso no es Gaussiano. En efecto, las distribuciones, aunque unimodales, parecen asimétricas y poseen una cola más gruesa que la cola normal y la otra más fina. Otra forma de comprobar la no Gaussianidad es observando la Figura 3.4, donde se comparan el **coeficiente de asimetría** y el **coeficiente de curtosis** (ver Apéndice A) muestrales de las 14 series con los valores que corresponden con una distribución normal.

Parece por lo tanto adecuado emplear una distribución que, con respecto a la distribución normal, posea:

- Una cola más gruesa y la otra más fina.
- Asimetría.

Análisis multivariado

En cuanto al análisis multivariado, se puede ilustrar la relación entre variables analizando las distribuciones empíricas bivariadas de las variables tomadas de dos en dos. En la Figura 3.5 se muestran 3 de las $\binom{14}{2} = 91$ funciones de densidad empírica conjuntas.

Como se ha comentado, el análisis del carácter multivariado se hará mediante el estudio de las covarianzas entre variables. En la Figura 3.6 se muestra un diagrama representativo de la **matriz de correlaciones** entre variables.

Como puede observarse, la matriz de correlaciones muestra que en muchos casos las variables aleatorias distan mucho de ser independientes. Dicho de otro modo, cuanto más alta sea la correlación, más se produce el fenómeno de la simultaneidad. La correlación entre dos variables no es más que el grado de **dependencia lineal**. Como desde este enfoque esta será el único tipo de dependencia que se considerará, resulta por lo tanto el parámetro (o mejor dicho, los n^2 parámetros) más importante del vector aleatorio (C_1, \dots, C_n) visto conjuntamente.

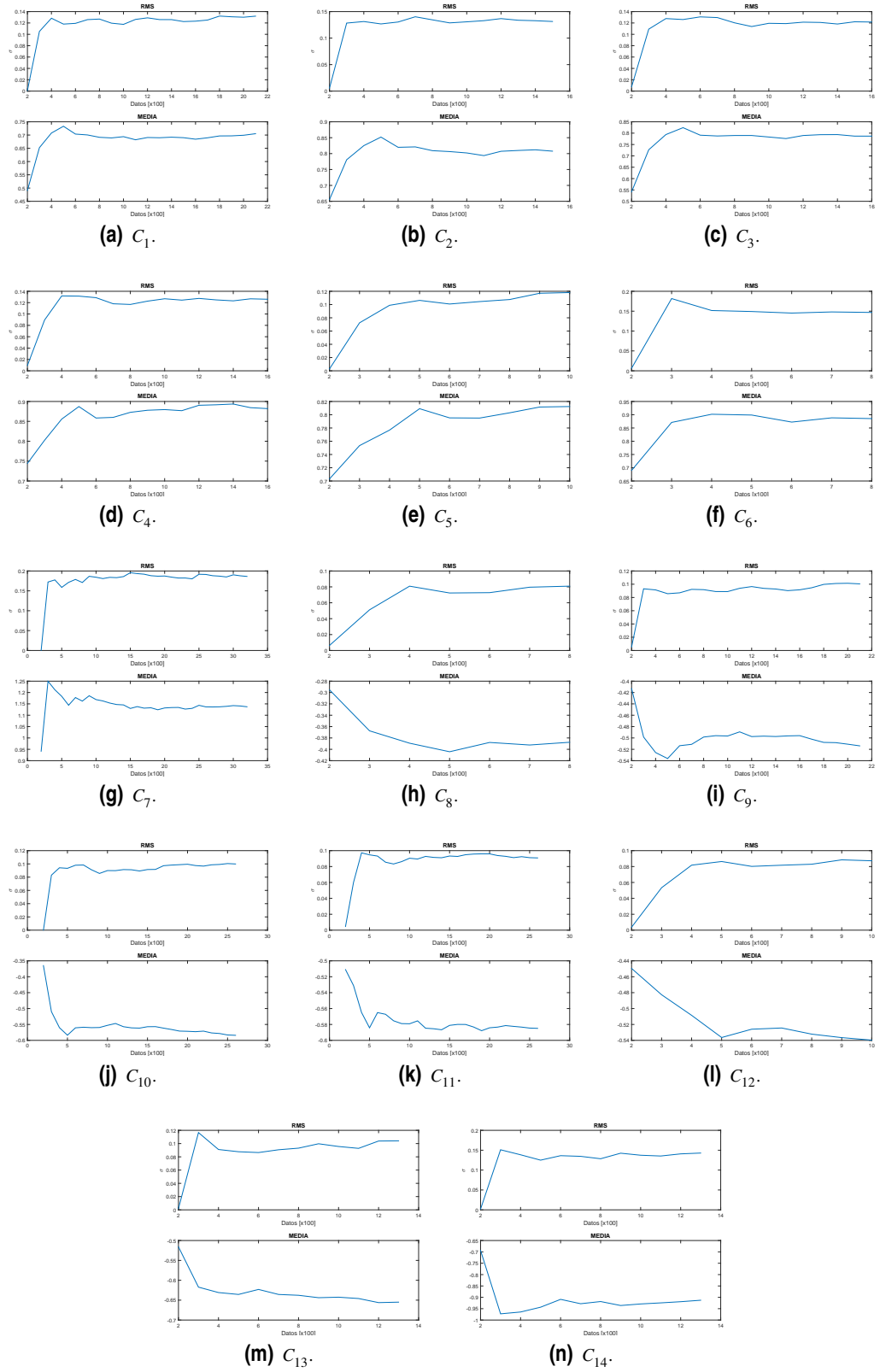


Figura 3.1 Valores de la media y el error estándar para cada una de las series temporales en función del número de datos escogidos.

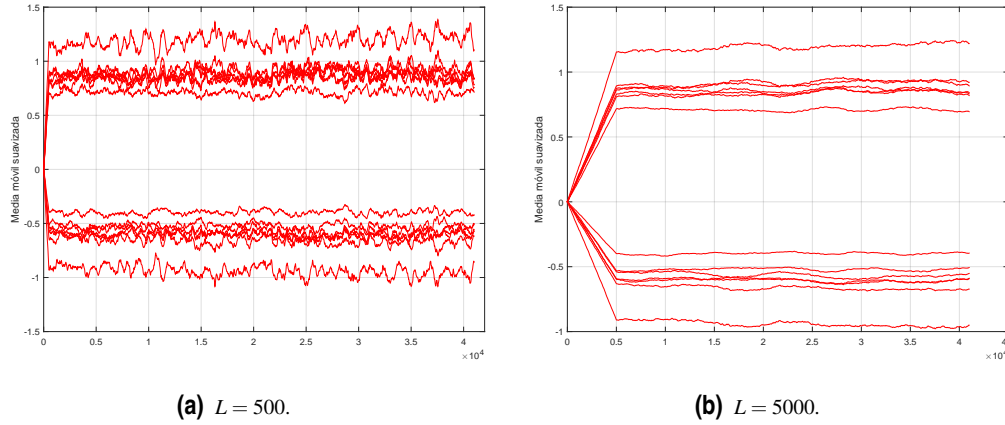


Figura 3.2 Medias móviles suavizadas.

Cabe señalar, como observación final, que esta abstracción estadística del fenómeno es una representación probabilística de la física subyacente del fenómeno de turbulencia. En esencia las correlaciones entre las variables C_i no son más que una manifestación numérica de las leyes de conservación (conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía) de la mecánica de fluidos. Es una herramienta matemática lineal que desliga el proceso de su raíz física, convirtiéndolo en un modelo meramente estadístico muy simple. No obstante, obsérvese que para usar este tipo de herramientas es necesaria **al menos una realización**. La estadística del sistema, y por lo tanto sus mecanismos probabilísticos, son capturados *a posteriori*. Este tipo de estrategias se vienen desarrollando recientemente con los Modelos de Reducción de Orden *a posteriori*. Su versión estadística, Análisis de Componentes Principales (PCA, *Principal Components Analysis*), descompone el modelo en series ortogonales (en el sentido de la covarianza) que capturan los diferentes modos de variabilidad [54]. Su versión dentro del Análisis Matemático y los Métodos Numéricos se conoce como la Descomposición Ortogonal (POD, *Proper Orthogonal Decomposition*), [11] [60], [61]. Finalmente, en el Álgebra Tensorial, se habla simplemente de Descomposición en Valores Singulares¹ (SVD, *Singular Value Decomposition*) o de Representación Tensorial de Bajo Orden [58]. Estas técnicas se utilizan por un lado, de cara a disminuir el coste computacional de las simulaciones, y por otro, para comprimir estructuras de datos de cara a un almacenamiento más eficiente o una mejor interpretación.

Análisis espectral

Supuesto el proceso estocástico dado por las variables $C_i(t)$ como estacionario y ergódico, éste queda determinado completamente por su función de autocorrelación [67] $R_i(\tau) = \rho(C_i(t), C_i(t + \tau))$, donde $\rho(X, Y)$ es la correlación entre las variables X e Y (Ver Apéndice A para un repaso breve de los conceptos de procesos estocásticos). Equivalentemente, se puede obtener la función de densidad espectral de la señal $S_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$. En la Figura 3.7 se muestran las funciones de autocorrelación empíricas y los espectros de potencia con sus bandas de confianza para las 14 series temporales.

¹ De hecho, esta herramienta se usa en contextos muy variados, como por ejemplo en Mecánica de Medios Continuos al hacer referencia a la descomposición polar del tensor gradiente de deformaciones

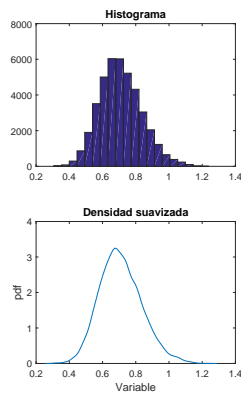
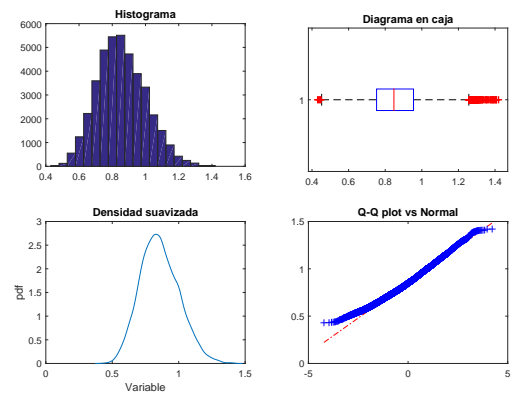
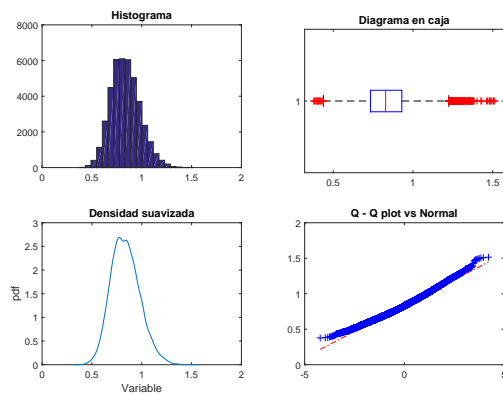
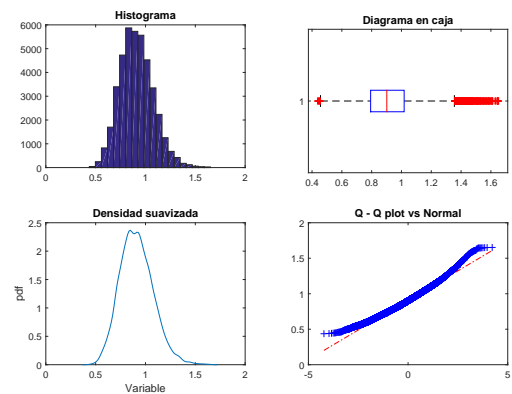
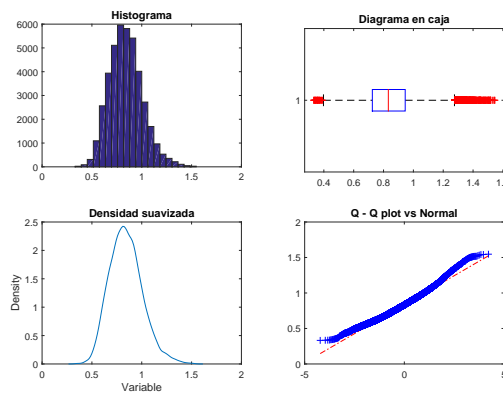
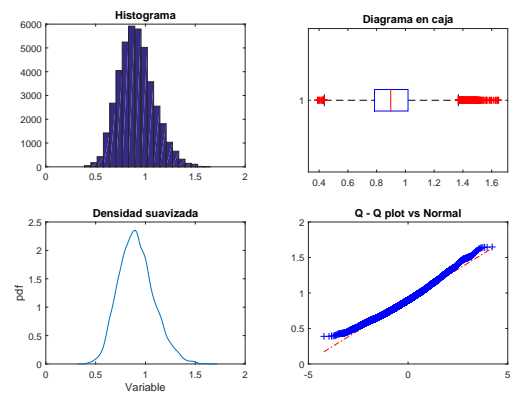
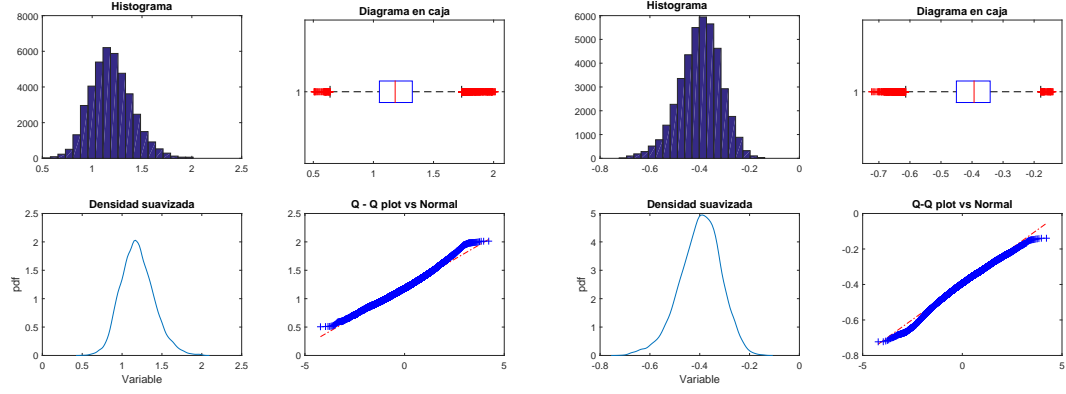
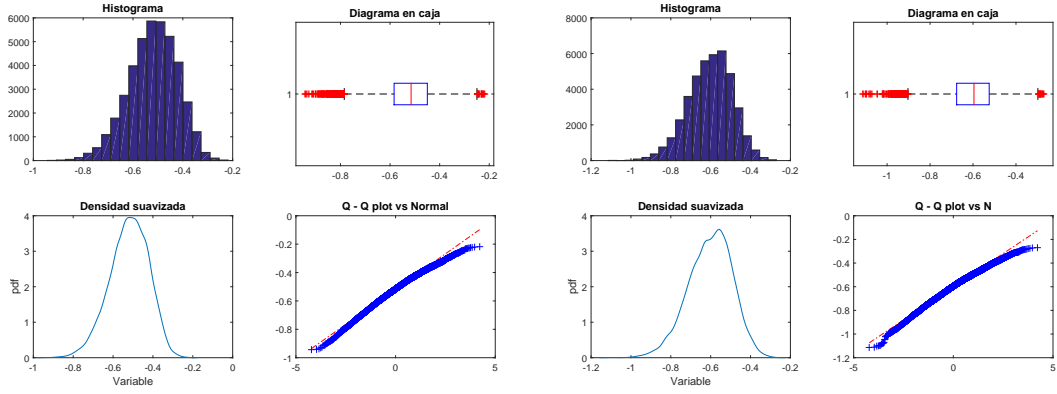
(a) C_1 .(b) C_2 .(c) C_3 .(d) C_4 .(e) C_5 .(f) C_6 .

Figura 3.3 Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas.



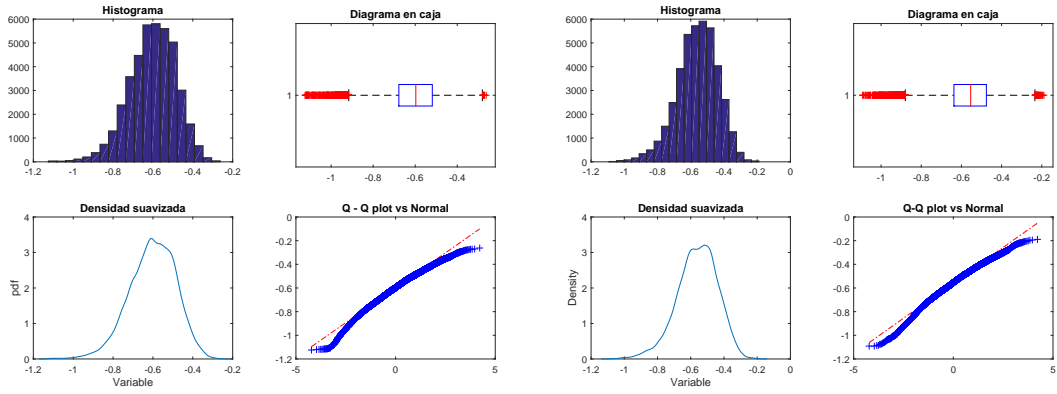
(g) C_7 .

(h) C_8 .



(i) C_9 .

(j) C_{10} .



(k) C_{11} .

(l) C_{12} .

Figura 3.3 Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas.

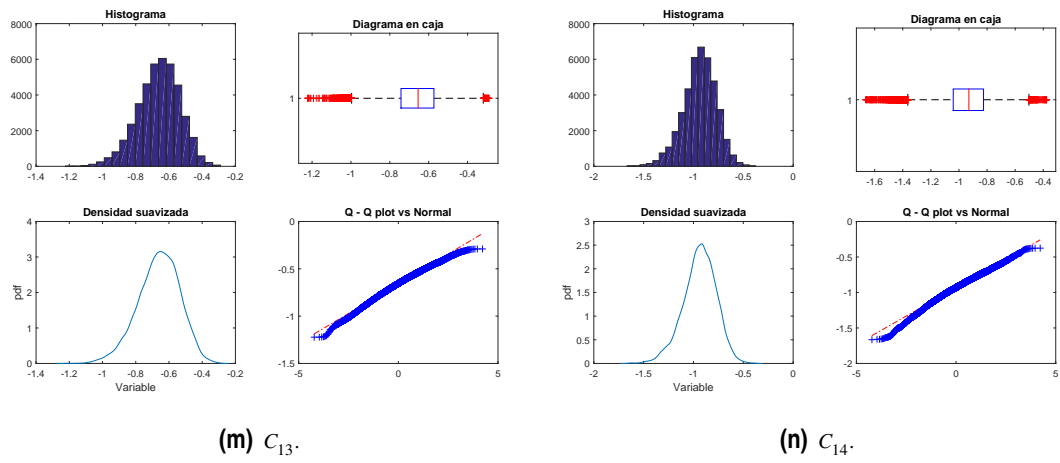


Figura 3.3 Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas.

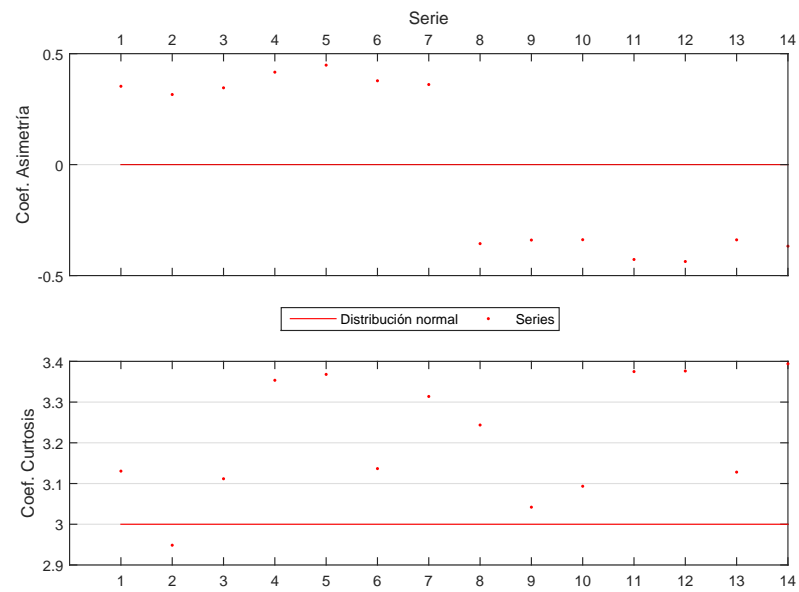


Figura 3.4 Coeficientes de asimetría y curtosis para las 14 series.

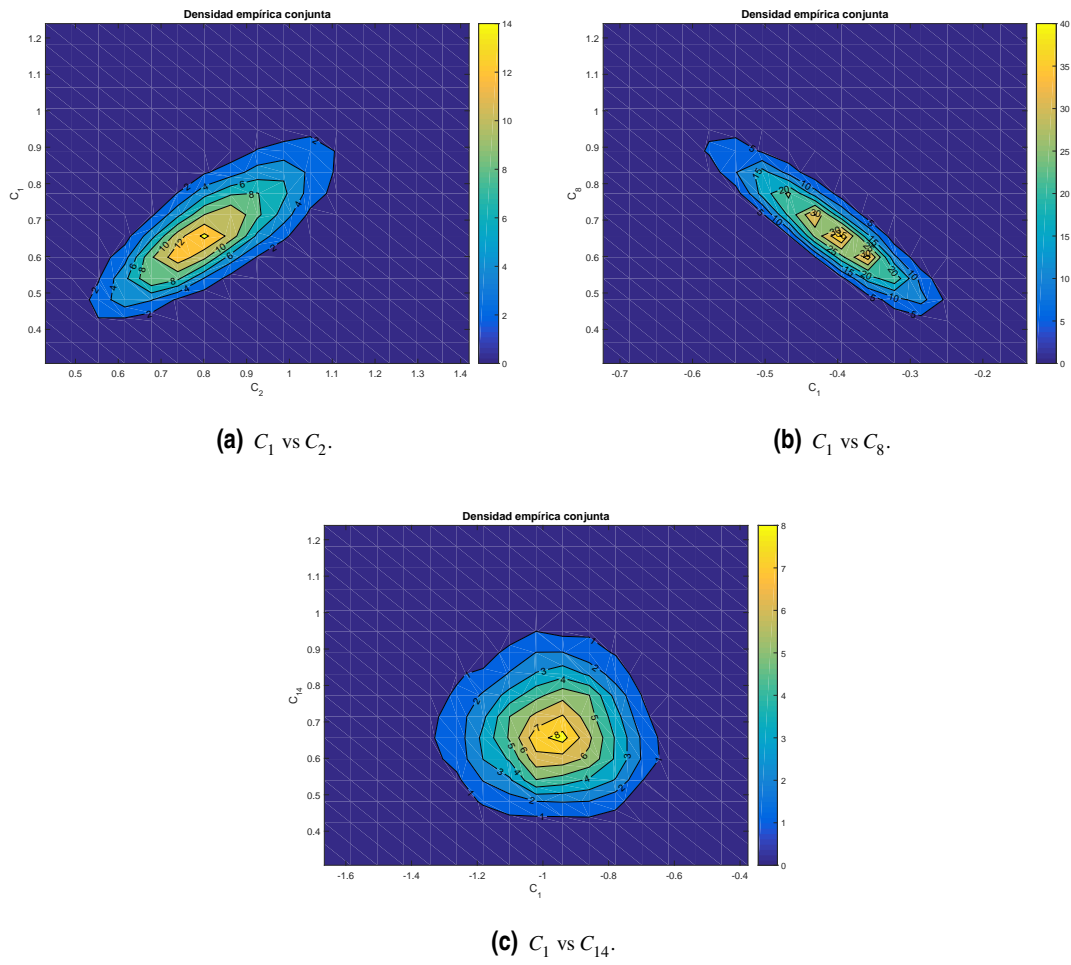


Figura 3.5 Algunas densidades conjuntas empíricas entre las 14 series de datos.

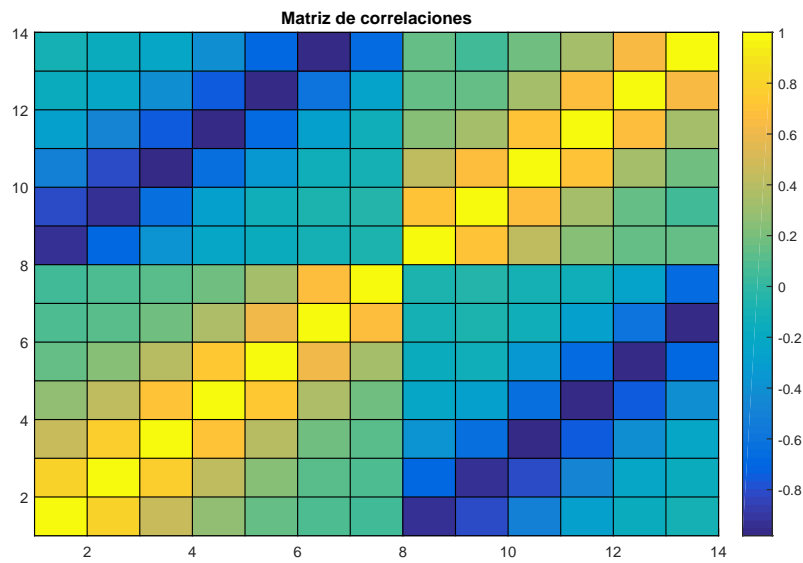


Figura 3.6 Matriz de correlaciones de las 14 series temporales.

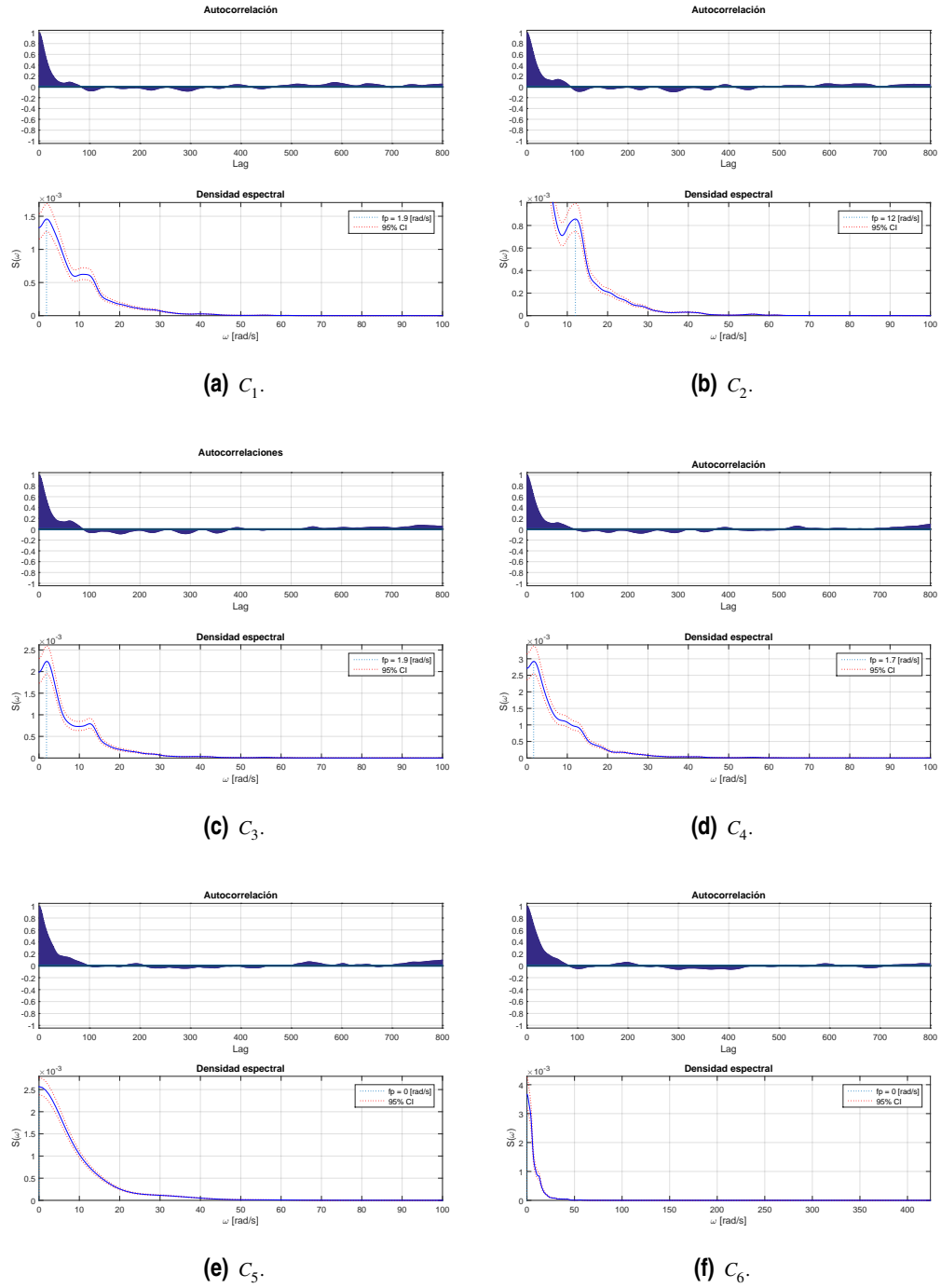


Figura 3.7 Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos C_i , $i = 1, \dots, 14$.

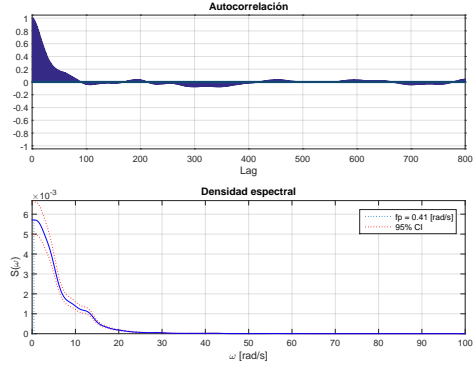
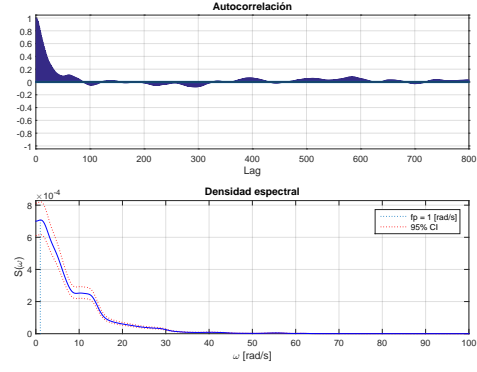
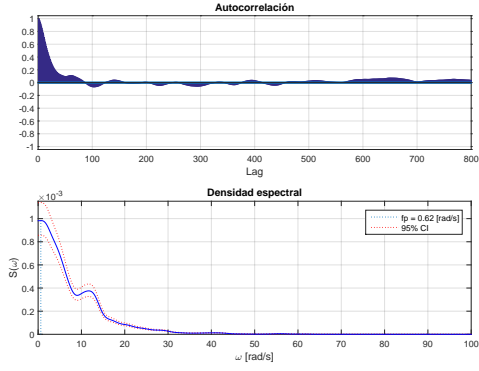
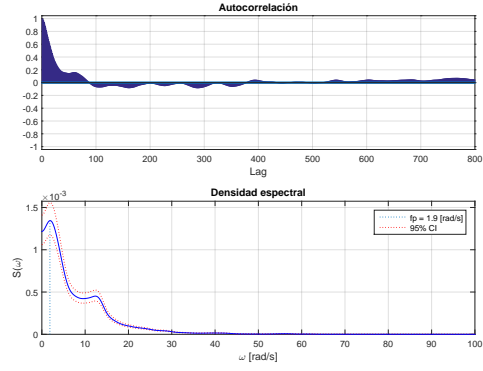
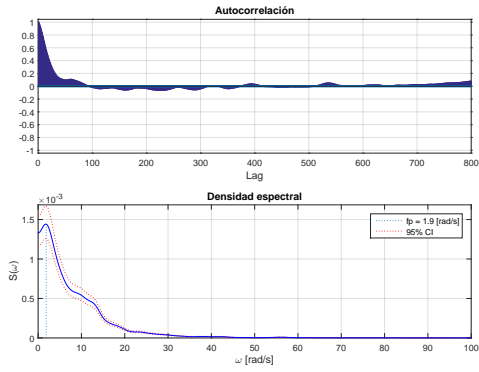
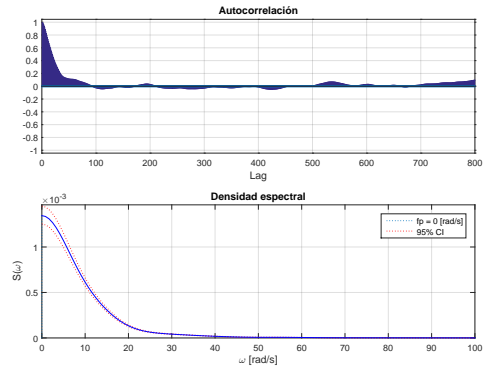

 (g) C_7 .

 (h) C_8 .

 (i) C_9 .

 (j) C_{10} .

 (k) C_{11} .

 (l) C_{12} .

 Figura 3.7 Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos C_i , $i = 1, \dots, 14$.

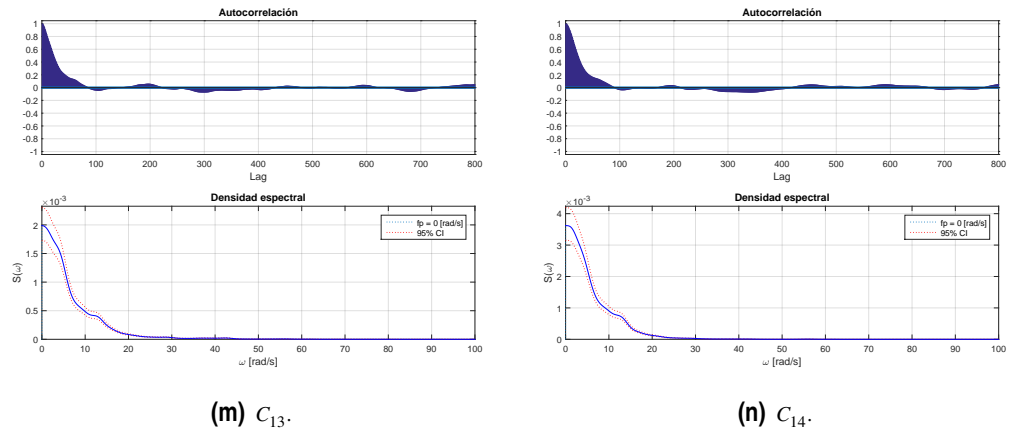


Figura 3.7 Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos C_i , $i = 1, \dots, 14$.

3.1.2 Modelo

A la vista de todos los análisis el modelo que se ha utilizado para capturar el proceso estocástico dado por $C_i(t)$, $i = 1, \dots, 14$ debe verificar:

- Es un proceso estacionario y ergódico. Las funciones de autocorrelación o equivalentemente las de densidad espectral deben parecerse a las dadas por la Figura 3.7
- Las variables aleatorias C_i sigue una distribución asimétrica, que se ajustarán mediante familias triparamétrica.
- La matriz de correlaciones debe asemejarse a la ilustrada en la Figura 3.6.

Así, se ha establecido para modelizar el proceso, o mejor dicho, la serie temporal del proceso discretizado, un **Modelo Vectorial Autorregresivo** de orden p (VAR(p)) estacionario [62]. La distribución de la variable aleatoria C_i se supone perteneciente a la familia paramétrica de *Weibull desplazada*, de tres parámetros θ (parámetro de localización), k (parámetro de forma) y λ (parámetro de escala), cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x - \theta}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x - \theta}{\lambda}\right)^k} \quad (3.2)$$

La función de distribución de probabilidad es

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x - \theta}{\lambda}\right)^k} \quad (3.3)$$

La variable X sigue la distribución *Weibull desplazada* si y sólo si $Y = X - \theta$ sigue la distribución *Weibull*. Se denotará mediante $\mathcal{LW}(\theta, \lambda, k)$ a esta familia de distribuciones. Al modelo estadístico se le denominará **modelo LWB** mientras que al modelo estadístico-espectral se le denominará **modelo VAR-LWB**.

Se insiste en que este modelo es *ad-hoc* y no está fundamentado en una realidad física subyacente, sino que responde a una conveniencia, de acuerdo con el análisis exploratorio realizado. Así, por ejemplo, con el modelo **VAR-LWB** se está postulando que existe siempre un límite, bien inferior o superior, para los coeficientes C_i (la distribución *Weibull* tiene una cola finita). Esto, a priori, no tiene ninguna razón de ser física, pero en secciones posteriores se verá que el ajuste es más que correcto.

3.1.3 Método de ajuste

Para el ajuste de los parámetros del modelo, hay que tener presente que por un lado hay que ajustar los parámetros estadísticos del modelo, a saber, para cada $i = 1, \dots, n$, θ_i , k_i y λ_i y finalmente los parámetros que modelizan la dependencia temporal, que son $p \times n \times n + \times n$ parámetros, de acuerdo con el modelo VAR(p). En el caso de la estructura utilizada, $n = 14$, por otro lado, p deberá escogerse de alguna forma.

Ajuste estadístico

Para el ajuste de los parámetros estadísticos, se seguirá el método de máxima verosimilitud, del mismo modo que se hizo en el Capítulo 2 para la distribución mixta de velocidades del viento, pero con alguna variante.

La función de verosimilitud asociada al modelo LWB para una muestra de tamaño N es, para cada serie

$$\mathcal{L}(\theta, \lambda, k | x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f(x_i) \quad (3.4)$$

En este caso, la función de log-verosimilitud, $l(\theta, \lambda, k | x_1, \dots, x_N) = \ln(\mathcal{L}(\theta, \lambda, k | x_1, \dots, x_N))$ tiene expresión analítica sencilla

$$l(\theta, \lambda, k | x_1, \dots, x_N) = N \ln(k) - kN \ln(\lambda) + (k-1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i - \theta) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N (x_i - \theta) \quad (3.5)$$

Si se define $x_{(1)}$ como el valor mínimo de la muestra $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$, se observa que si $\theta \rightarrow x_{(1)}$, $\ln(x_{(1)} - \theta) \rightarrow -\infty$. Así si $k < 1$, entonces $(k-1) \ln(x_{(1)} - \theta) \rightarrow +\infty$ y si $k > 1$, entonces $(k-1) \ln(x_{(1)} - \theta) \rightarrow +\infty$. La función l no está acotada y no puede hallarse una solución de máxima verosimilitud para los tres parámetros

del modelo. Así, se estimará $\hat{\theta} = \min_{i=1, \dots, N} \{x_i\} = x_{(1)}$ y se hará $Y = X - \hat{\theta}$. La variable Y se ajusta mediante técnicas clásicas de máxima verosimilitud para los parámetros λ y k utilizando la función `wblfit` de MATLAB®.

Los estimadores obtenidos, por lo tanto, no gozan de tan buenas propiedades como si el ajuste fuera puramente de máxima verosimilitud. Por ejemplo, es fácil ver que $\hat{\theta}$ es un estimador sesgado ya que $x > \theta$, y $\hat{\theta} = x_{(1)}$ luego $\mathbb{E}[X_{(1)}] > \theta$ y el sesgo es $B(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta > 0$. El análisis de las propiedades estadísticas de estos estimadores, sin embargo, queda fuera del alcance de este trabajo.

Ajuste de la dependencia temporal

La dependencia temporal se modeliza mediante un modelo VAR(p). Fijado p , de acuerdo con [62], el modelo vectorial puede expresarse mediante la ecuación

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{e}_p \quad (3.6)$$

Los parámetros de las p matrices \mathbf{A}_j y el término independiente \mathbf{c} se ajustan mediante mínimos cuadrados, tal y como se describe en [62].

Para la selección del parámetro p , se prueba con modelos VAR(m) con $m \leq 10$ y se escoge el valor de p según el criterio de Información Bayesiana (BIC, *Bayesian Information Criterion*), de nuevo siguiendo las directrices de [62].

Como el proceso es no Gaussiano, antes del ajuste vectorial autorregresivo, se han transformado las variables $C_i(t)$ en variables que Gaussianas $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mediante la transformación $Y_i = \Phi^{-1}(F_i(X_i))$ donde Φ es la función de distribución correspondiente a la normal estándar y F_i es la función de distribución correspondiente a la serie i . En efecto

$$\begin{aligned} \Pr[Y_i \leq y] &= \Pr[\Phi^{-1}(F_i(C_i)) \leq y] \\ &= \Pr[F_i(C_i) \leq \Phi(y)] \\ &= \Pr[C_i \leq F_i^{-1}(\Phi(y))] \\ &= F_i(F_i^{-1}(\Phi(y))) \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

3.1.4 Comprobación del ajuste

La Figura 3.8 muestra los ajustes mediante el modelo LWB para cada una de las series consideradas en términos de la función de densidad y la función de distribución. En la Figure 3.9 se muestran los diagramas de probabilidad correspondientes (*P-P plot* y *Q-Q plot*) y en la Figura 3.10 se muestra una comparativa entre el diagrama de caja de los datos y uno obtenido mediante simulación a partir del modelo LWB. Como puede verse, el modelo resulta bastante adecuado, aunque, como ya se comentó, presenta un ligero sesgo, debido a la estimación del parámetro de localización θ .

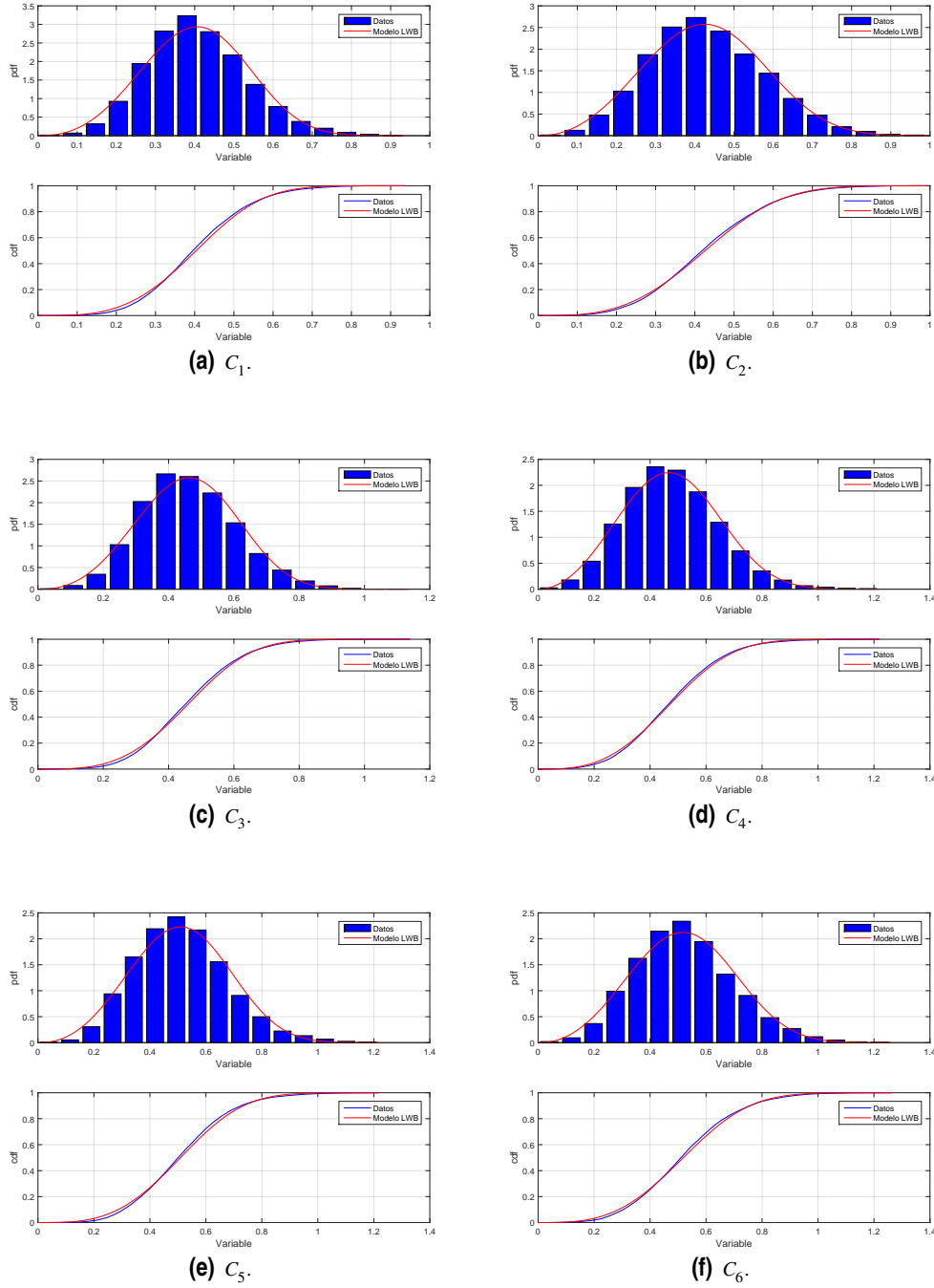


Figura 3.8 Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB.

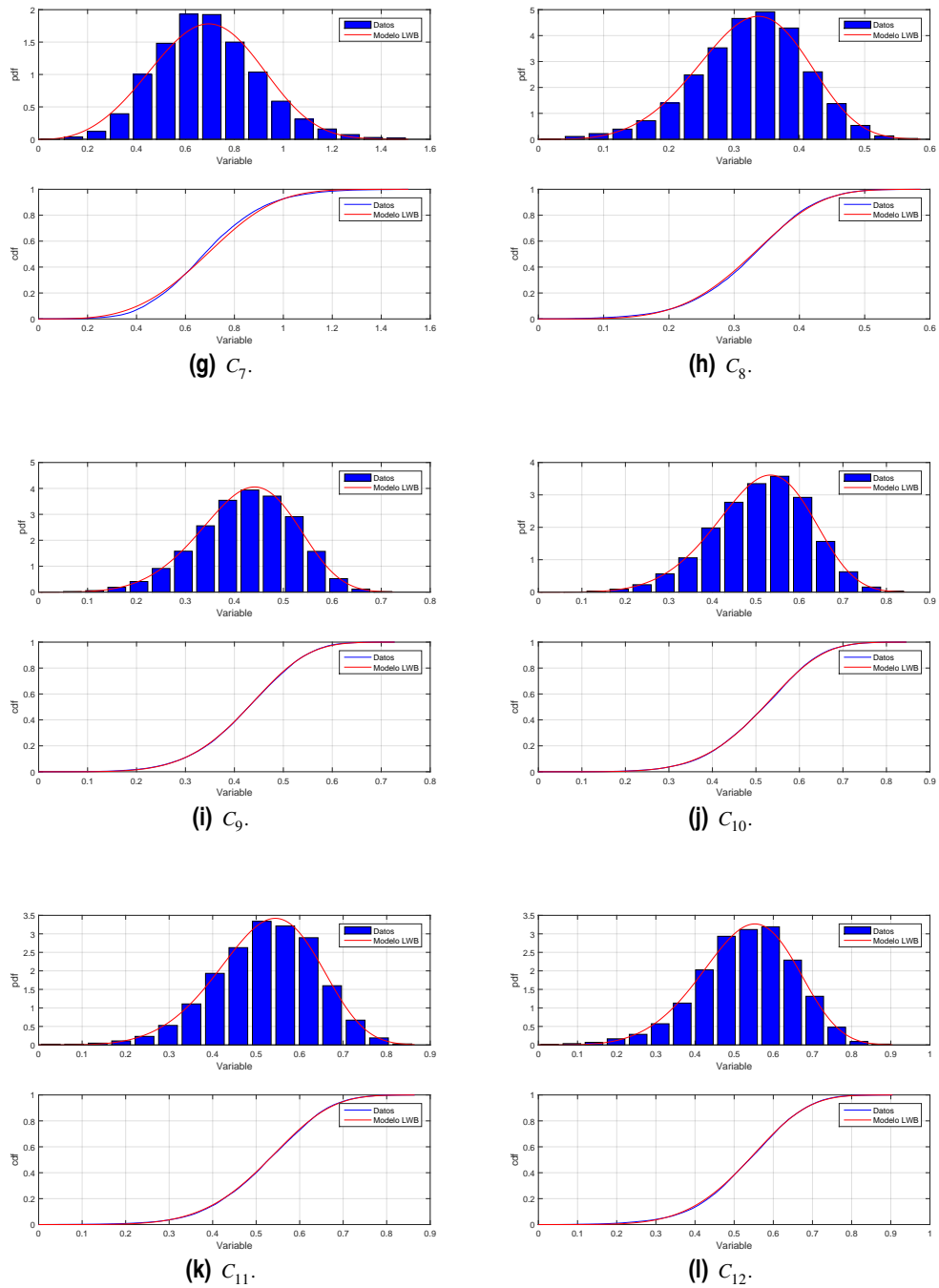


Figura 3.8 Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB.

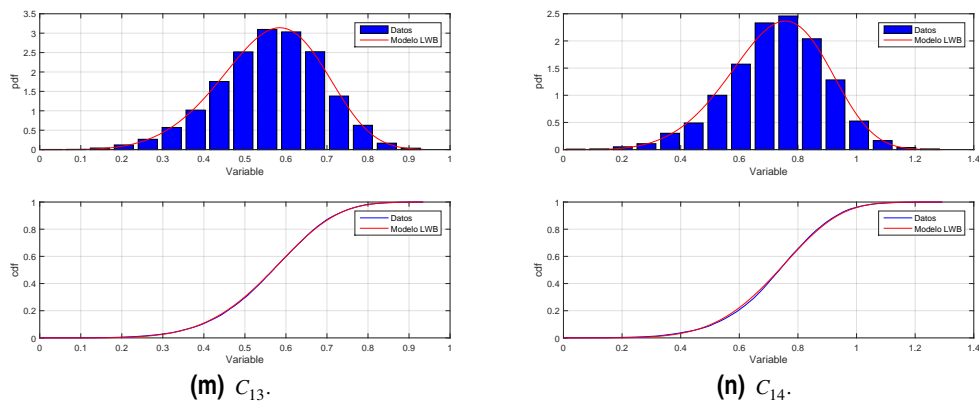


Figura 3.8 Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB.

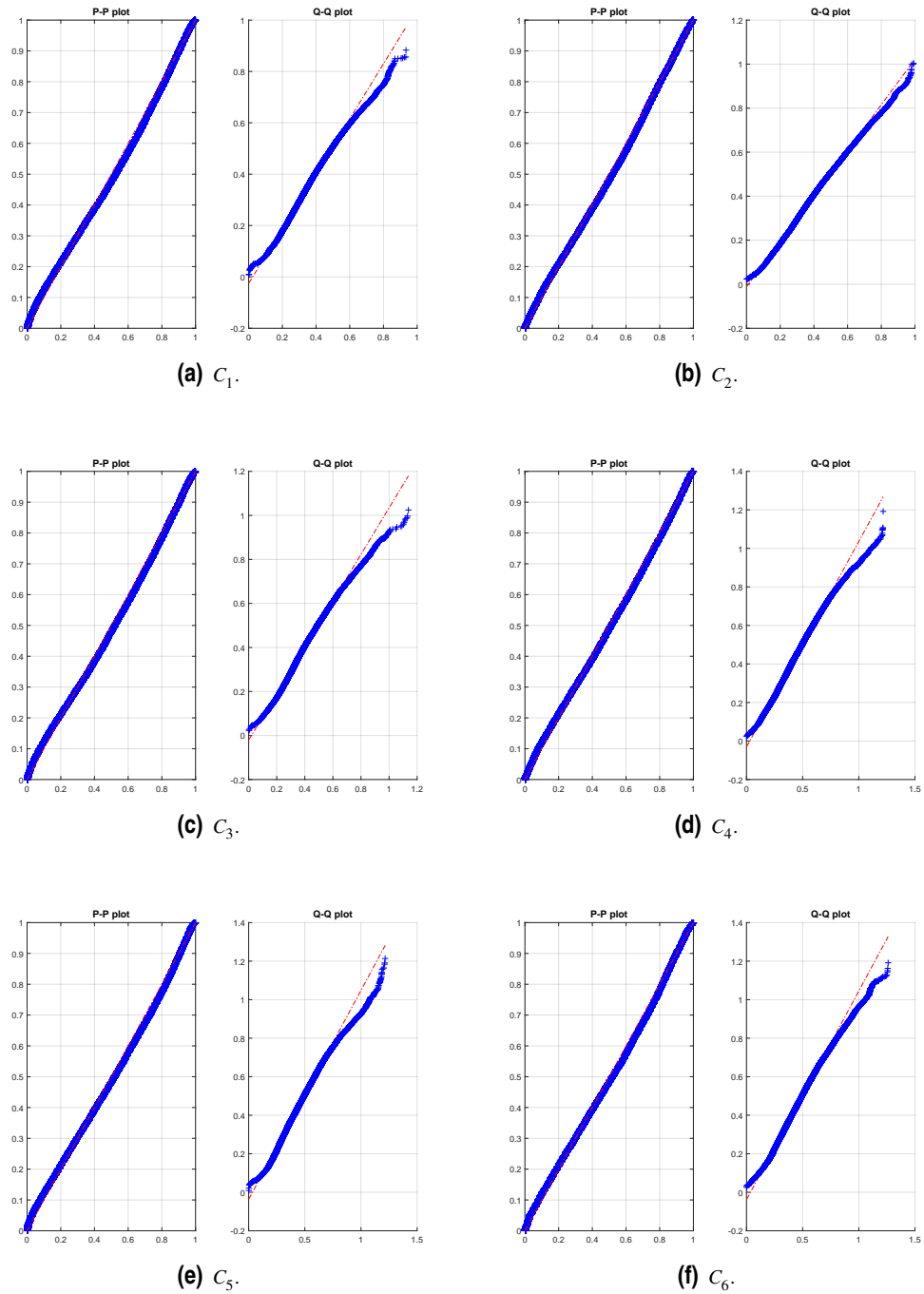
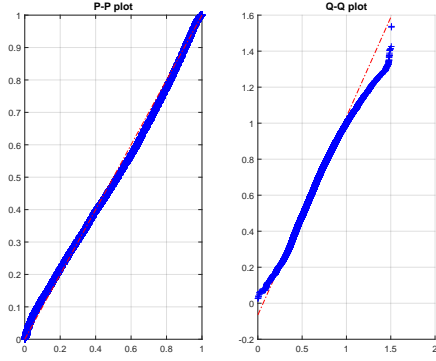
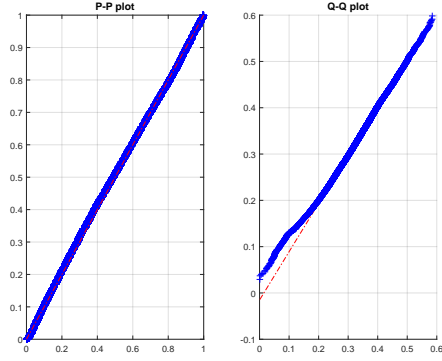


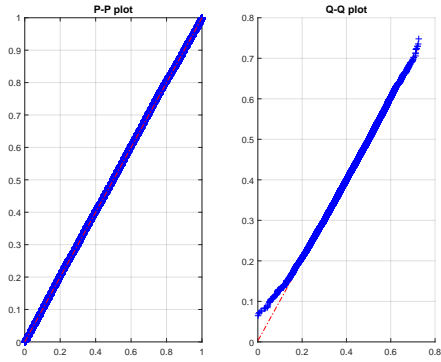
Figura 3.9 Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB.



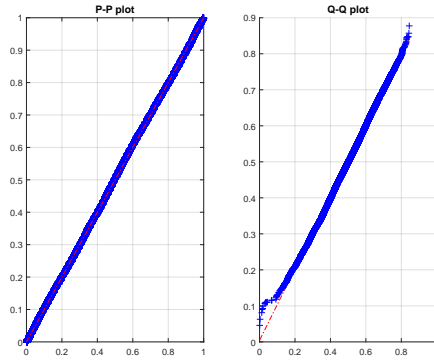
(g) C_7 .



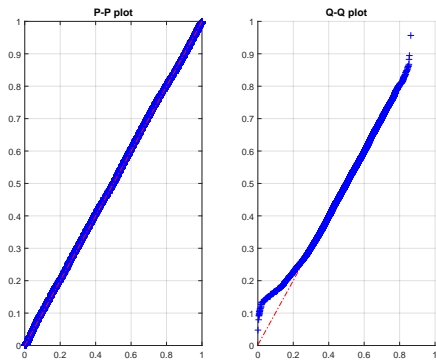
(h) C_8 .



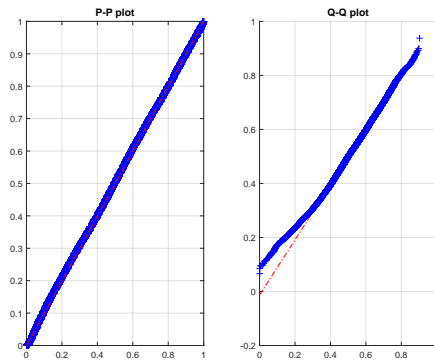
(i) C_9 .



(j) C_{10} .



(k) C_{11} .



(l) C_{12} .

Figura 3.9 Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB.

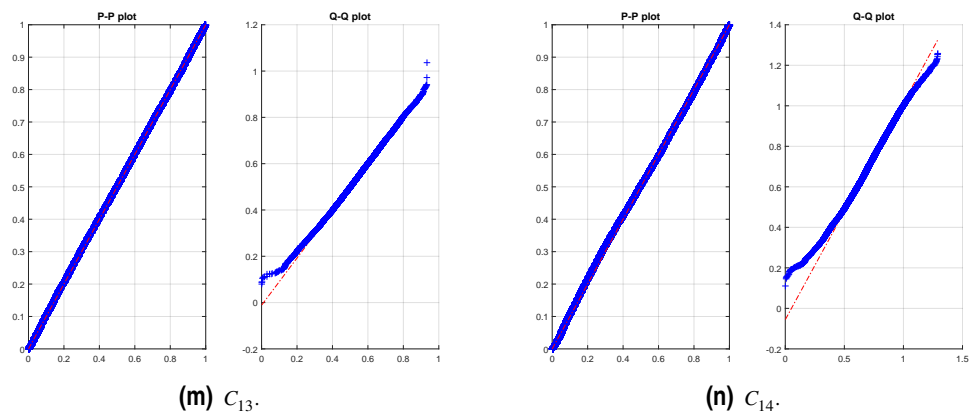
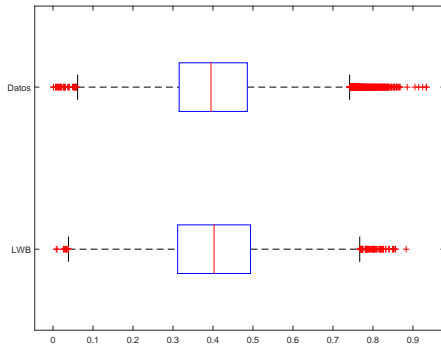
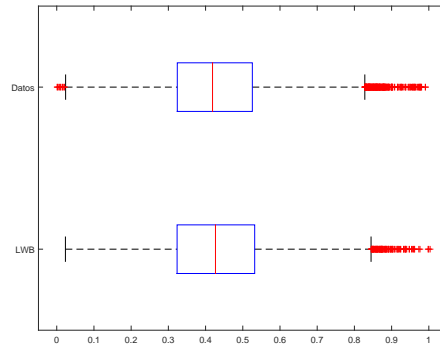


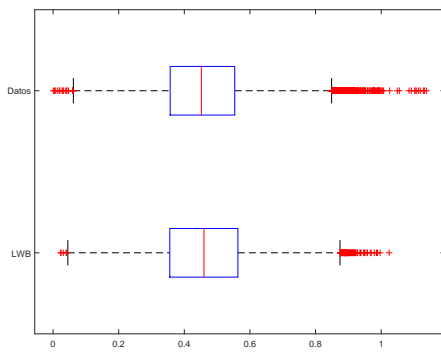
Figura 3.9 Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB.



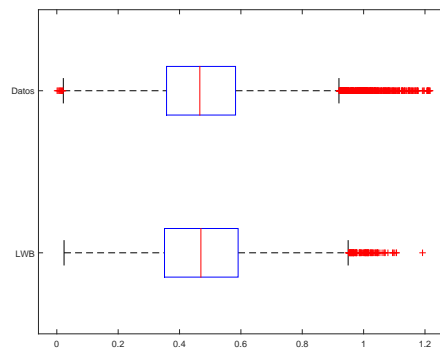
(a) C_1 .



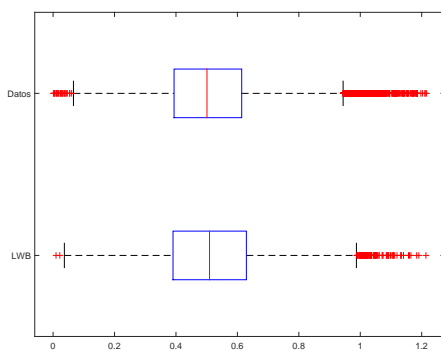
(b) C_2 .



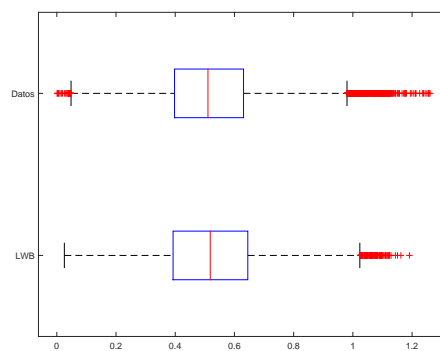
(c) C_3 .



(d) C_4 .



(e) C_5 .



(f) C_6 .

Figura 3.10 Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB.

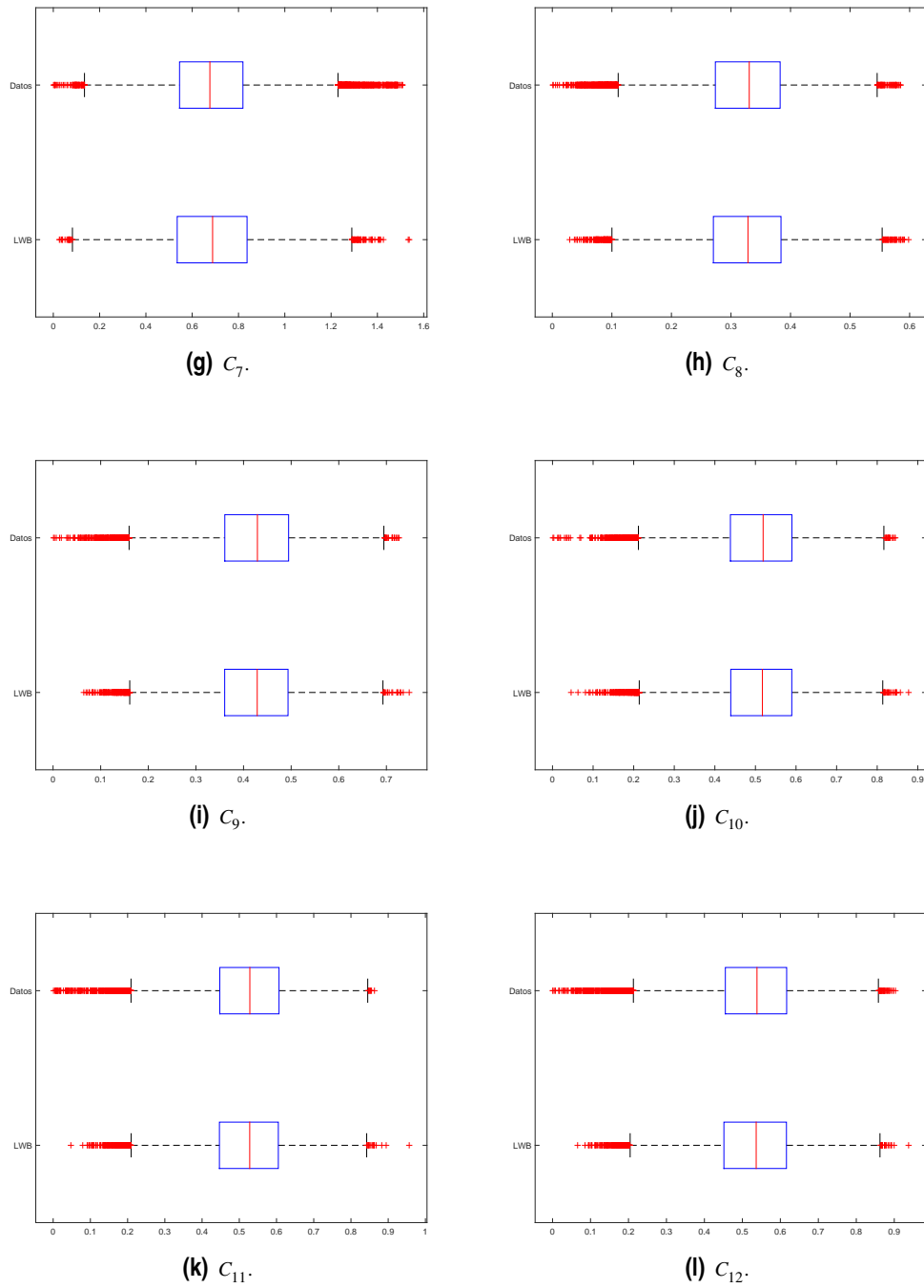


Figura 3.10 Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB.

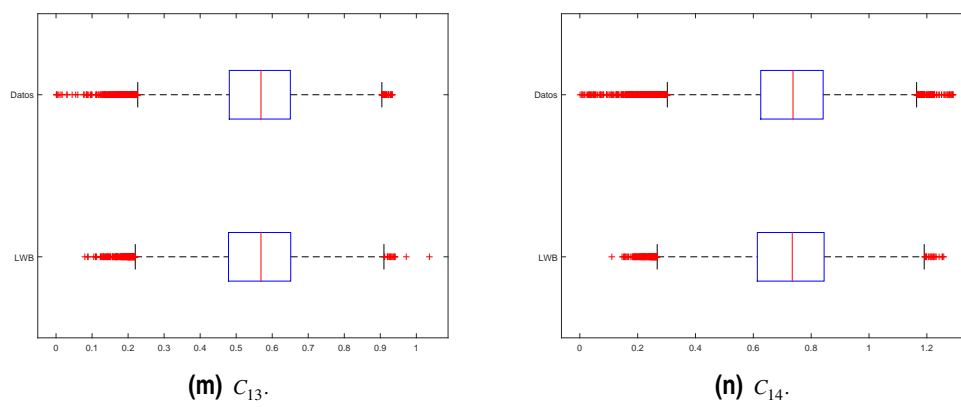


Figura 3.10 Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB.

3.2 Simulación y validación mediante *bootstrapping* paramétrico

Como se verá en capítulos posteriores, el interés del modelo VAR-LWB es disponer de un método de reproducción de las cargas externas que actúan sobre la estructura considerada, lo que en este texto se ha llamado variables ambientales. El modelo, por lo tanto, no sólo sirve para reproducir la simulación de unas cargas aleatorias sobre la estructura, reproduciendo las propiedades estadísticas y espectrales, sino que presenta variabilidad de una simulación a otra. Aquí, es esencial recordar que el proceso $C_i(t)$ se ha supuesto estacionario y ergódico y que por lo tanto una sola realización aporta toda la información estadística del proceso.

Con el fin de validar el modelo, en el contexto en el que luego será evaluado, se plantea en este apartado un *bootstrapping* paramétrico.

La técnica del *bootstrapping* se viene usando cada vez más en los últimos años debido principalmente al desarrollo de las técnicas de computación y la mejora de las capacidades de los procesadores, ya que es una técnica de computación intensiva. Consiste en extraer la información estadística deseada de un modelo simplemente a partir de muestras obtenidas a partir del mismo². Supóngase que se quiere estimar un parámetro θ de un modelo, y que éste se estima mediante un estadístico $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_N)$, donde X_1, \dots, X_N es una muestra de tamaño n del modelo. Entonces, para obtener las propiedades estadísticas de $\hat{\theta}$, en lugar de hacer inferencia analítica sobre dicha función, que será más o menos complicado en función de como sea f y que en general sólo es satisfactorio para casos asintóticos ($N \rightarrow \infty$), se puede muestrear a partir del modelo un número M de muestras de tamaño N , $(X_1, \dots, X_N)_1, \dots, (X_1, \dots, X_N)_M$ y observar el comportamiento estadístico de $\hat{\theta}$ mediante la muestra $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M$.

Existen dos clases de *bootstrapping*:

- **Bootstrapping paramétrico:** Si el modelo subyacente es paramétrico, se simulan M muestras de tamaño N a partir del modelo paramétrico y se estudia el estadístico $\hat{\theta}$.
- **Bootstrapping no paramétrico:** Se realizan simulaciones mediante remuestreo de la serie de datos original, es decir se utiliza directamente para obtener las M muestras la función de distribución empírica F_e de los datos originales.

En este estudio, como se dispone de un modelo paramétrico y se quiere estudiar el rendimiento del mismo, se ha optado por la primera opción. En el Capítulo 8, se desarrollará en profundidad el *bootstrapping* no paramétrico para la estimación de parámetros y probabilidades.

Para la simulación numérica, se han generado $M = 50$ veces $n = 14$ series temporales $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, de acuerdo con el modelo VAR(p) de tamaño $N = 41003$ que por supuesto serán series correlacionadas y autocorrelacionadas de acuerdo con el modelo. Como además se trata de un modelo probabilístico, deberá haber una variación intrínseca en cada una de las series de acuerdo con el modelo LWB. Para ello, se simulan M series gaussianas de acuerdo con el modelo VAR(p) Y_i y se transforman en las series C_i mediante la transformación $C_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i))$.

3.2.1 Estudio estadístico

Estudiemos en primer lugar algunas propiedades estadísticas así como su variabilidad. En la Figura 3.11 se muestran algunos estadísticos frecuenciales para las $n = 14$ series de coeficientes $C_i(t)$. Dichos estadísticos son el mínimo, el primer cuartil Q_1 , la mediana m , el tercer cuartil Q_3 y el máximo. En las gráficas de la izquierda se muestra la media de los M valores simulados mediante *bootstrapping* así como el intervalo de confianza al 90%, definidos mediante los percentiles 5 y 95. En las gráficas de la derecha se muestra el error estándar y el sesgo para cada serie. Se observa que el modelo es exacto (poco sesgo) y bastante preciso (poca variabilidad), aunque el hecho de que la variabilidad sea no nula es la que sitúa el modelo en el marco probabilístico. Hay que resaltar que en los estadísticos extremos (máximo y mínimo) es donde, naturalmente, se produce un mayor sesgo (positivo para el mínimo y negativo para el máximo): los ajustes toman información de toda la muestra por lo que cualquier estimación del máximo lo subestimaré, y cualquier

² De ahí el calificativo, *bootstrap* significa tirarse de los cordones hacia adelante, inferir propiedades estadísticas a partir de la propia muestra

estimación del mínimo lo sobrestimaré.

La Figura 3.12 reproduce lo mismo para estadísticos basados en los momentos, en particular la media μ y la desviación típica σ , de donde se extrae un análisis semejante. La exactitud del estadístico μ tiene especial relevancia, ya que muestra el régimen medio de cada una de las series temporales, algo que tiene repercusión directa en términos de rendimiento de un sistema, si esta es la variable que condiciona el mismo.

Análisis univariado

En la Figura 3.13 y la Figura 3.14 se comparan los datos originales con los de **una** de las M simulaciones **escogida aleatoriamente**. Esto es representativo de la validez del modelo en cuanto a su capacidad para replicar el fenómeno considerado. Por no sobrecargar el documento, se incluyen solo los análisis para la serie 1 y la serie 14, siendo el resto de análisis muy similares. El modelo muestra aquí también su potencia para capturar la estadística del fenómeno.

Análisis bivariado

Se recuerda que el análisis multivariado que se ha llevado a cabo está basado en las correlaciones lineales entre variables. En la Figura 3.15 se muestra una comparativa entre la matriz de correlaciones de los datos reales y los resultados obtenidos mediante simulación. De nuevo, se ilustra el valor medio de las correlaciones a partir de las $M = 50$ simulaciones, así como el valor del sesgo y del error estándar, que como ya se ha dicho, son representativos de la exactitud y precisión del método, así como, para el segundo parámetro de la variabilidad del modelo probabilístico.

Como es habitual, cuanto mayor sea la correlación lineal entre variables, más precisa es la estimación de la misma, siendo perfectamente precisa para variables linealmente dependientes (por ejemplo términos de la diagonal, donde $X = Y$).

Aunque el estudio se restringe a un ajuste y análisis paramétrico lineal, puede realizarse un análisis no paramétrico, simplemente por comprobar si, más allá de la dependencia basada en correlaciones, el modelo ilustra bien la dependencia no lineal entre variables. Para ello, en la Figura 3.16 se presenta la función de densidad empírica conjunta de las variables 1 y 2, 1 y 8 y 1 y 14, para **una** de las M simulaciones **escogida aleatoriamente**.

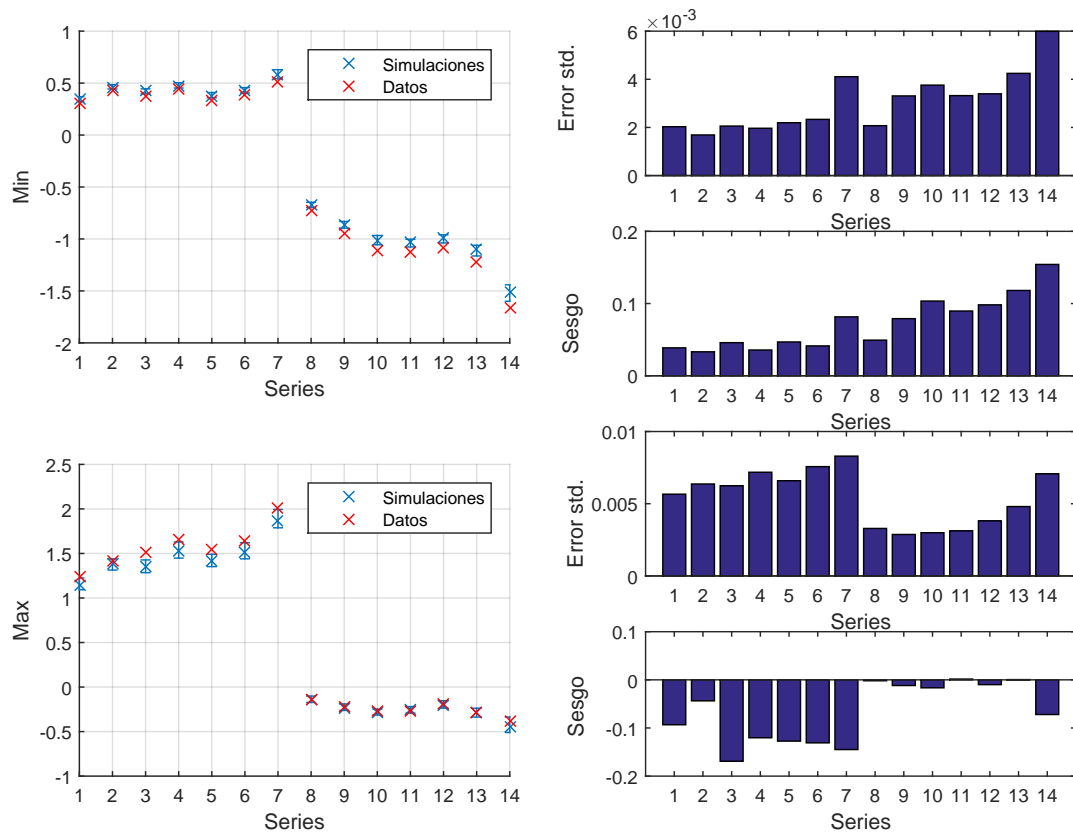
Se observa que el modelo captura razonablemente bien la dependencia no lineal, aunque esta dependencia queda mejor capturada cuanto más cerca espacialmente están las dos series temporales, como cabría esperar. En particular, la dependencia entre las diferencias en las densidades empíricas conjuntas de las series C_1 y C_{14} comienzan a ser apreciables.

3.2.2 Estudio espectral

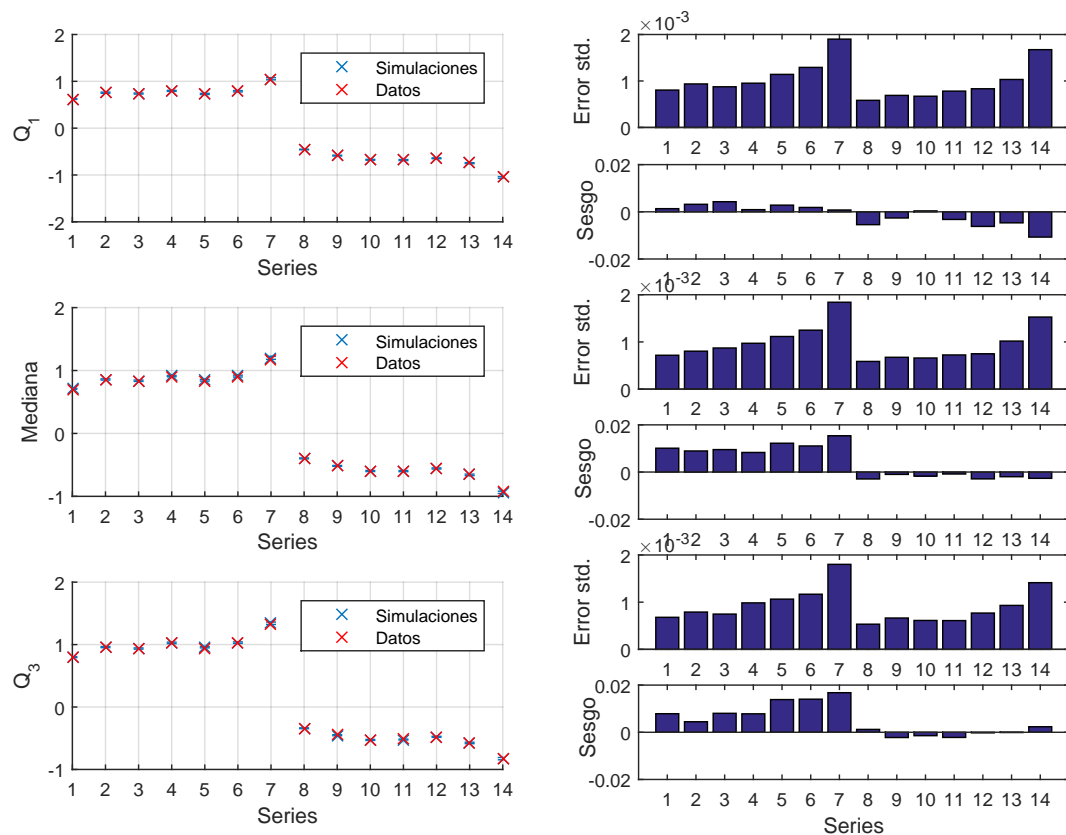
Finalmente, para la dependencia temporal, en la Figura 3.17 y la Figura 3.18 se muestra, en las gráficas de la izquierda, la comparativa de la función de correlación y el espectro para los datos originales y los de **una** de las M simulaciones **escogida aleatoriamente** y en la gráfica de la derecha la serie temporal de la simulación. De nuevo, por no sobrecargar el documento, se incluye sólo el análisis para las series 1 y 14 siendo las conclusiones idénticas para todos los demás.

Se observa que el modelo captura razonablemente bien la dependencia temporal. No obstante, el modelo subestima en general el contenido frecuencial, siendo esta diferencia bastante sensible en la franja entre 5 rad/s y 20 rad/s. Este es, en general el principal problema que tienen los modelos VAR(p): al estar basados en un ajuste paramétrico de los coeficientes de autocorrelación de las series temporales, no tiene una flexibilidad suficientemente grande para capturar con tanta precisión el espectro de la señal.

Como se verá en lo que sigue, para los propósitos del cálculo estructural que se llevará a cabo (cálculo *cuasi-estático*), esto tiene muy poca influencia, ya que el análisis deja de lado la dinámica del sistema. No obstante, de cara a futuros trabajos en los que sí que se considere el cálculo dinámico, este modelo puede presentar algunos problemas y debería ser revisado.



(a) Máximos y mínimos.



(b) Cuartiles.

Figura 3.11 Estudio mediante *bootstrapping* de algunos estadísticos frecuenciales.

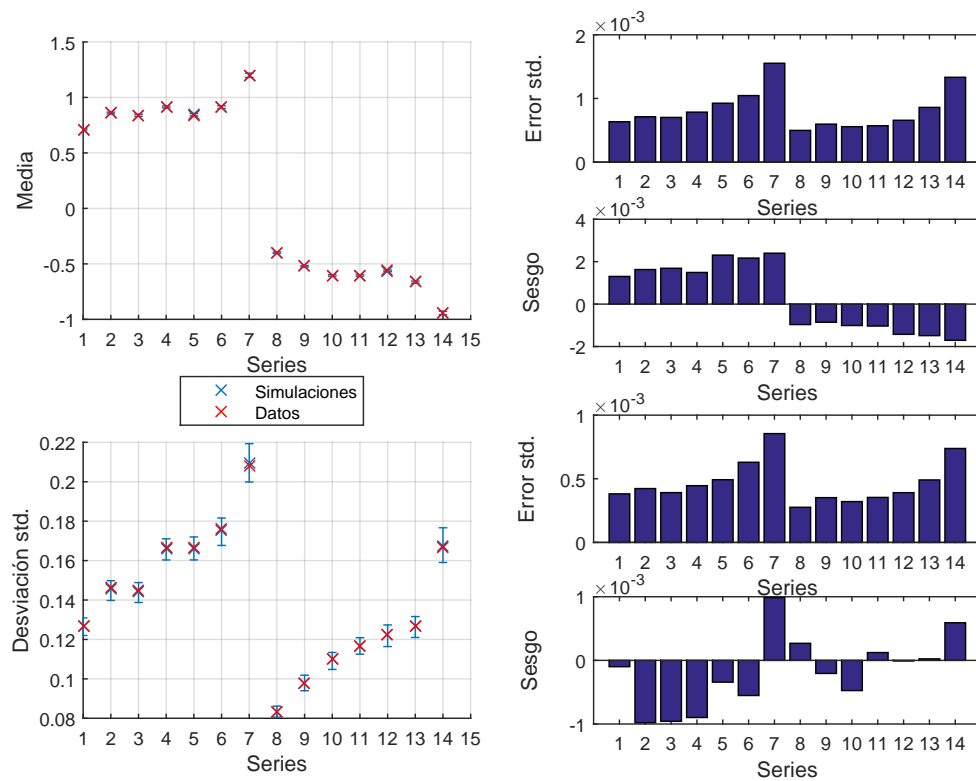
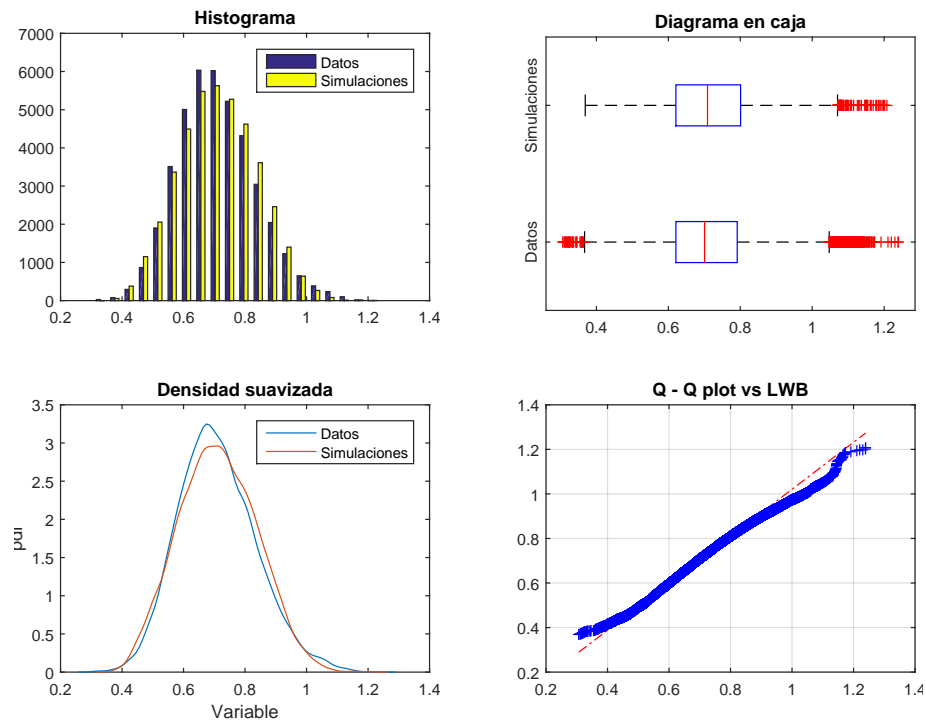
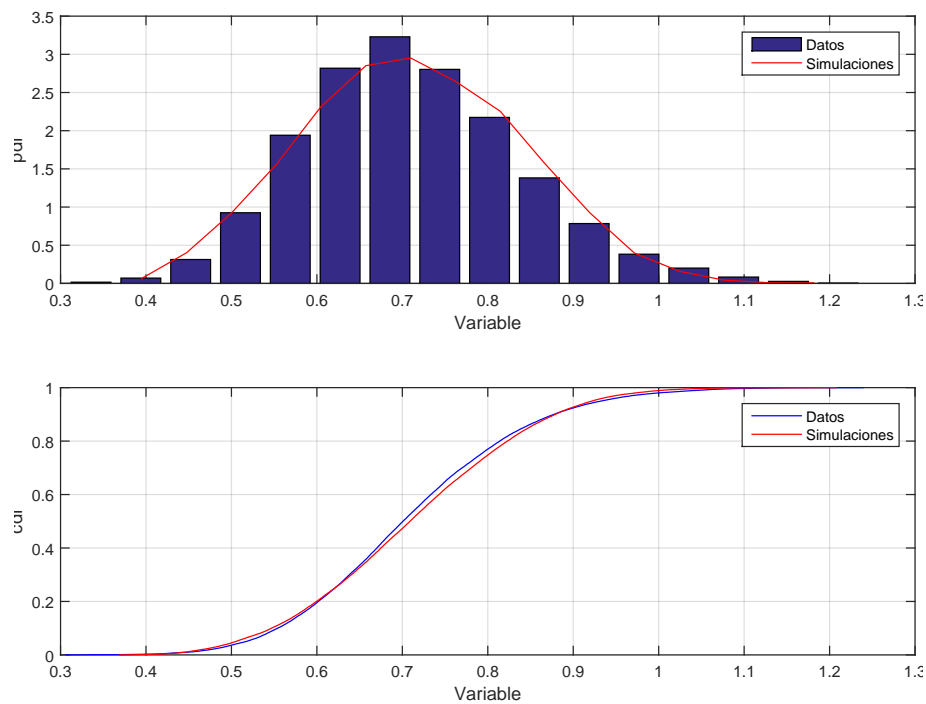


Figura 3.12 Estudio mediante *bootstrapping* de algunos estadísticos basados en los momentos.

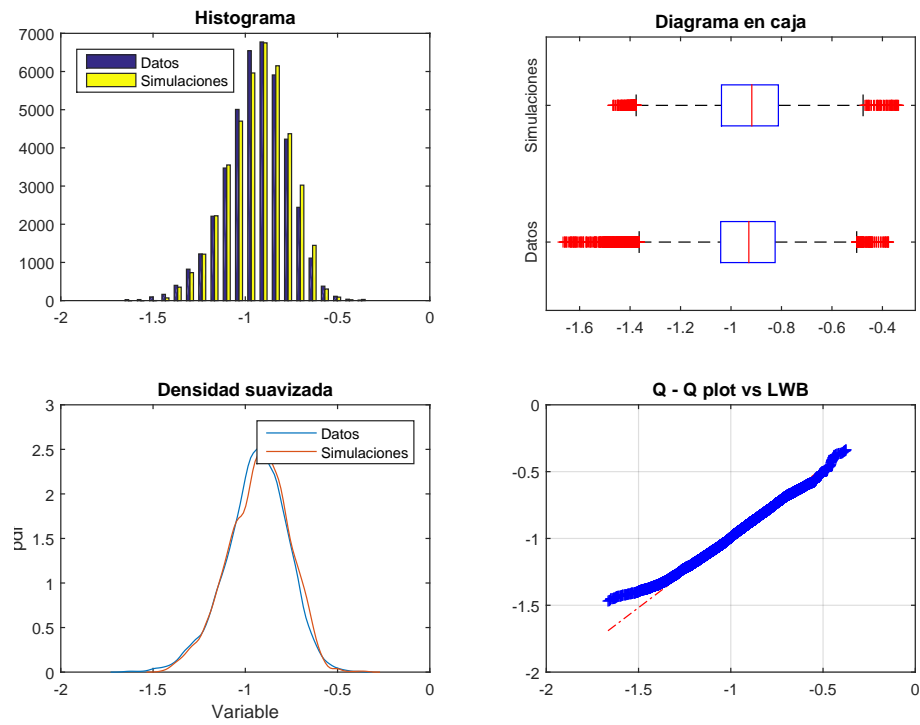


(a) Exploración básica.

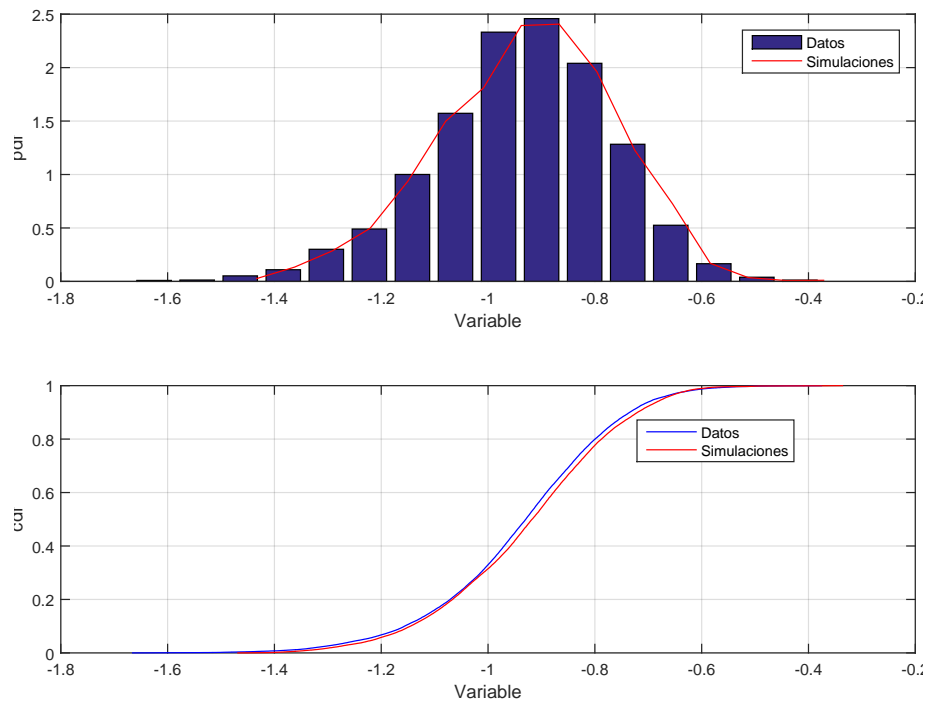


(b) Funciones de densidad y de distribución.

Figura 3.13 Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_1 .



(a) Exploración básica.



(b) Funciones de densidad y de distribución.

Figura 3.14 Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14} .

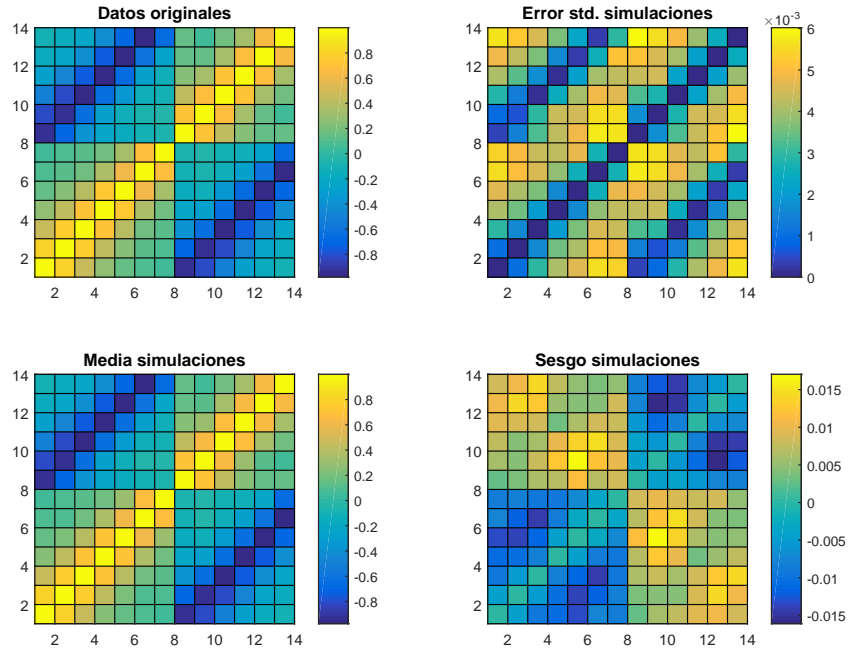


Figura 3.15 Estudio mediante *bootstrapping* de los coeficientes de correlación entre las variables.

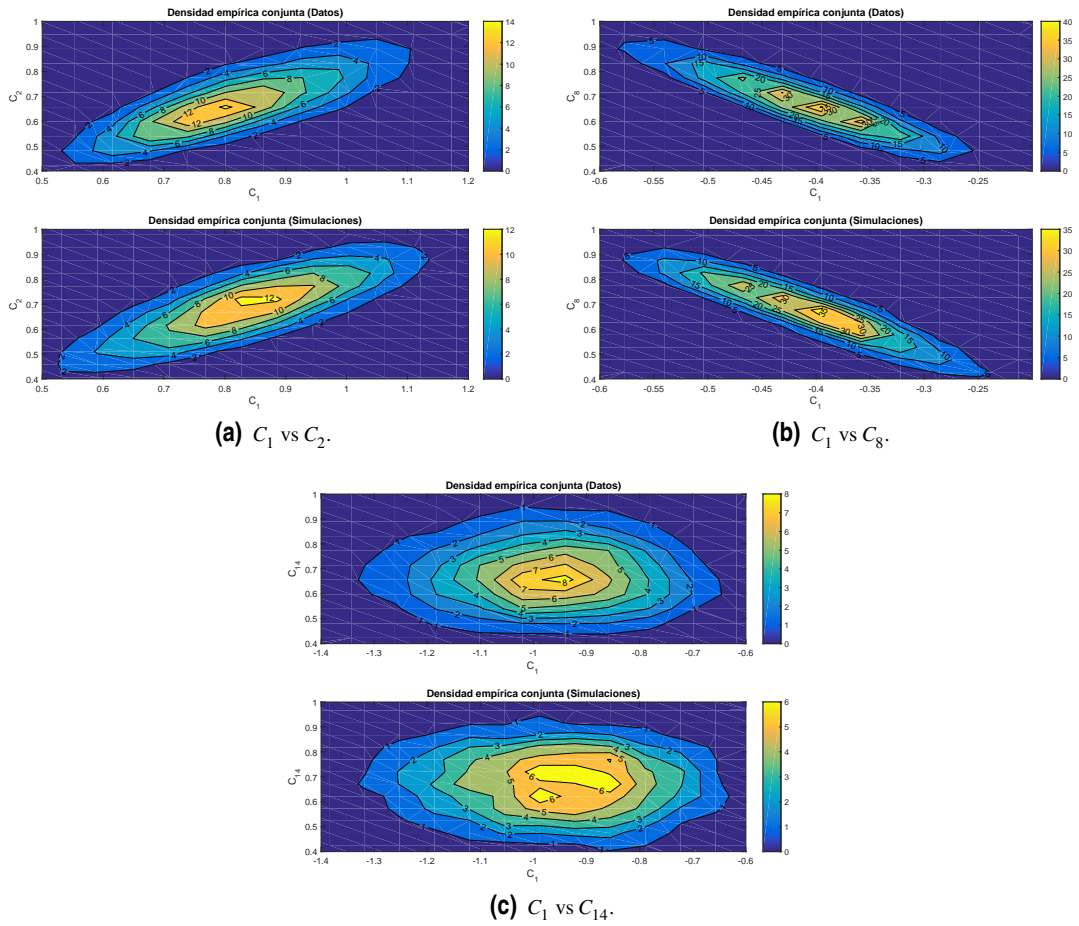
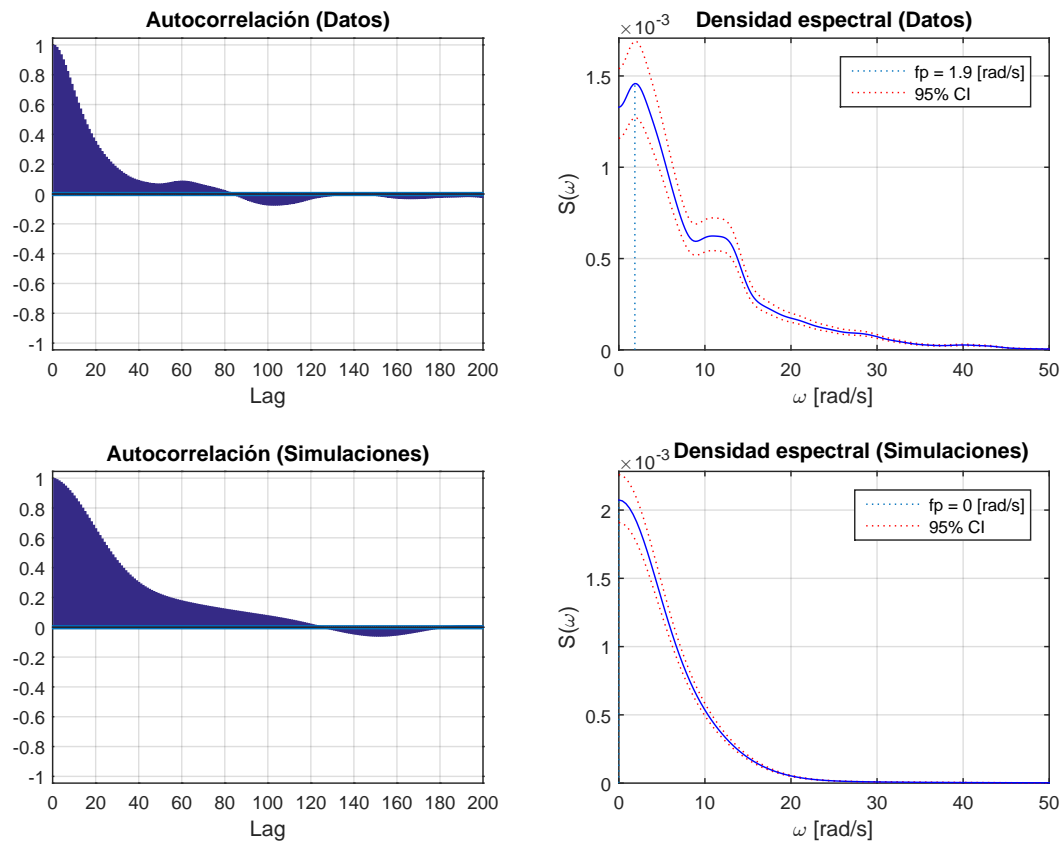
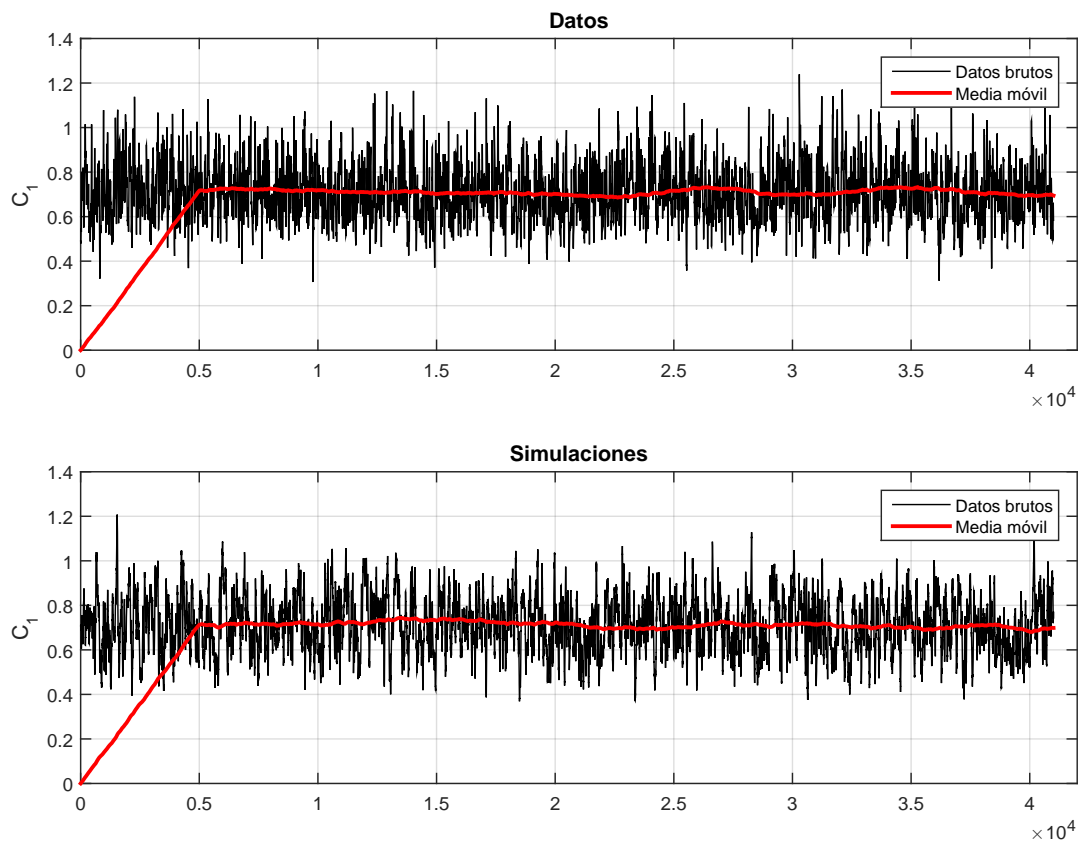


Figura 3.16 Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14} .



(a) Autocorrelación y espectro.



(b) Serie temporal.

Figura 3.17 Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_1 .

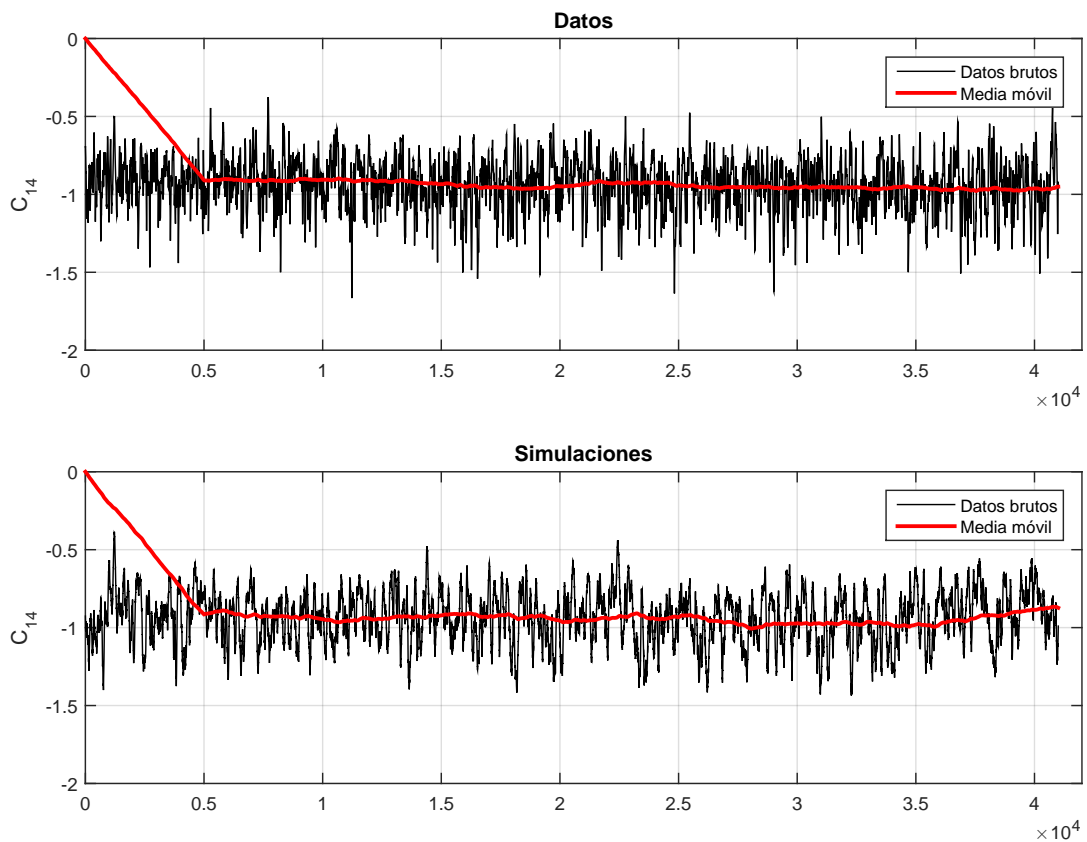
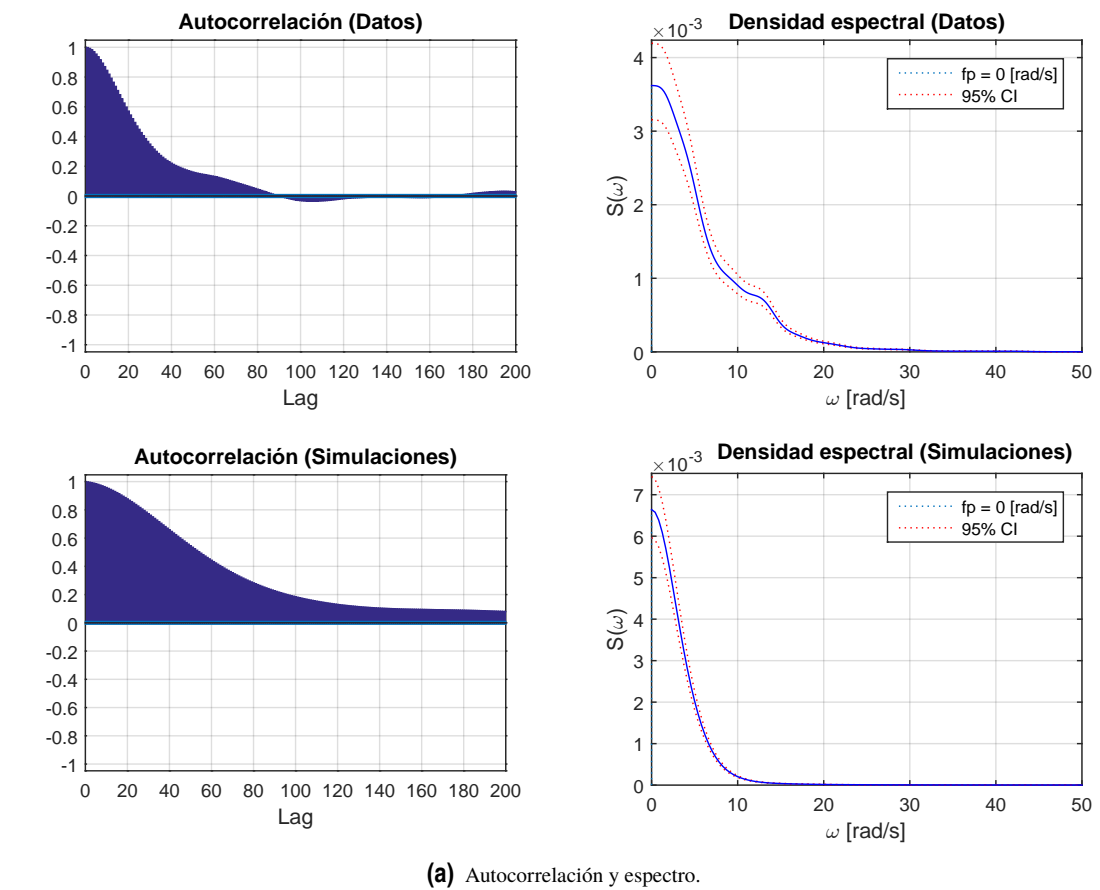


Figura 3.18 Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14} .

3.3 Aplicación a la reducción de coste computacional en cálculos de cargas de viento

El modelo VAR-LWB presentado es un modelo paramétrico que, como se ha comprobado, captura muy bien la estadística de los coeficientes de fuerzas sobre los elementos romos que sufren las cargas de viento. Sería una buena idea, por lo tanto, utilizar el modelo para identificar, mediante experimentación numérica, cuánto tiempo hace falta simular de cara a capturar toda la estadística de unas cargas de viento. Como el número de parámetros del modelo autorregresivo no es fijo y dichos parámetros se calculan a posteriori, en función del número de datos, utilizando un criterio BIC, los únicos parámetros que deben capturarse son los que hacen referencia al modelo distribucional (estadístico), esto es, los tres parámetros de la familia *Weibull desplazada*, a saber: el parámetro de localización θ , el parámetro de escala λ y el parámetro de forma k .

3.3.1 Planteamiento del problema

La idea que se plantea para detectar el tiempo mínimo necesario de simulación para capturar el fenómeno es muy sencilla. Se trata de controlar ciertos estadísticos muestrales temporales, para las series temporales de C_i . Hasta la fecha, era habitual en el marco del cálculo de cargas de viento, controlar dos estadísticos muestrales hasta que se estabilizaran, el valor medio de las cargas μ y la raíz de la media cuadrática RMS (*Root Mean Square*) o la desviación típica σ^3 , para el grado de libertad i :

$$\mu_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_i(t_j) \quad m \leq N$$

$$RMS_i(m) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_i^2(t_j)} \quad m \leq N$$

El modelo presentado en las secciones anteriores es un modelo triparamétrico, por lo tanto, sería necesario estudiar un tercer parámetro, de cara a capturar mejor el fenómeno; esta es la novedad fundamental que se presenta. Si se utiliza un modelo de tres parámetros, la información suficiente para ajustar mediante máxima verosimilitud el modelo LWB estará contenida en una muestra en la que tres estadísticos muestrales hayan convergido numéricamente. A partir de ese instante de simulación, todos los nuevos datos obtenidos no aportarán información significativa al modelo, ya que éste no dispone de más grados de libertad que capturen la estadística del fenómeno que no haya sido capturada hasta el momento.

Como tercer estadístico muestral temporal, se puede tomar por ejemplo el coeficiente de asimetría o el coeficiente de curtosis, aunque cualquier otro estadístico resultaría apropiado. Dichos estadísticos tienen como expresión (aunque existen algunas variaciones en función del convenio utilizado) para el grado de libertad i -ésimo:

$$sk_i(m) = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_i(t_j) - \mu_i(m))^3}{\sigma_i(m)^3} \quad m \leq N$$

$$k_i(m) = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_i(t_j) - \mu_i(m))^4}{\sigma_i(m)^4} \quad m \leq N$$

En lo que sigue, los tres estadísticos muestrales que se utilizarán para realizar el análisis serán la media μ , la cuasi-desviación estándar s y el coeficiente de curtosis k :

³ Recuérdese que para una variable X , $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = RMS_X^2 - \mu_X^2$

$$\mu_i(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_i(t_j) \quad m \leq N$$

$$s_i(m) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (C_i(t_j) - \mu_i(m))^2} \quad m \leq N$$

$$k_i(m) = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (C_i(t_j) - \mu_i(m))^4}{\sigma_i(m)^4} \quad m \leq N$$

Para tener en cuenta la estabilización de los n grados de libertad considerados, se definen los vectores $\boldsymbol{\mu}(m) = (\mu_1(m), \dots, \mu_n(m))$, $\mathbf{s}(m) = (s_1(m), \dots, s_n(m))$ y $\mathbf{k}(m) = (k_1(m), \dots, k_n(m))$ y se consideran $\mu(m) = \|\boldsymbol{\mu}(m)\|$, $s(m) = \|\mathbf{s}(m)\|$ y $k = \|\mathbf{k}(m)\|$. Estos serán los estadísticos que se analizarán en cuanto a convergencia para determinar si el tiempo de simulación. El problema es escoger el valor de m mínimo que haga que los estadísticos μ , s y k estén estabilizados. En particular, se puede analizar $T = \sqrt{\mu^2 + s^2 + k^2}$ y realizar un estudio del estadístico T . Obsérvese que al realizarse el estudio sobre el coeficiente de fuerzas, adimensional, todos los estadísticos son comparables y por lo tanto el estadístico T tiene sentido.

3.3.2 Resultados

Para ilustrar la metodología, se suponen las series temporales de C_i que se han considerado en los apartados anteriores. La Figura 3.19 muestra la evolución de los estadísticos muestrales considerados para los primeros instantes de tiempo de simulación. La Figura 3.20 muestra la norma vectorial de cada uno de los estadísticos. Se ha detenido el análisis cuando el error en el paso j , definido mediante $\varepsilon_j = |T_j - T_{j-1}|$ sea menor que $TOL = 0.01$. Dicho error se muestra en la Figura 3.21. Se observa que aunque la convergencia no es monótona, el error sí que tiene una tendencia decreciente

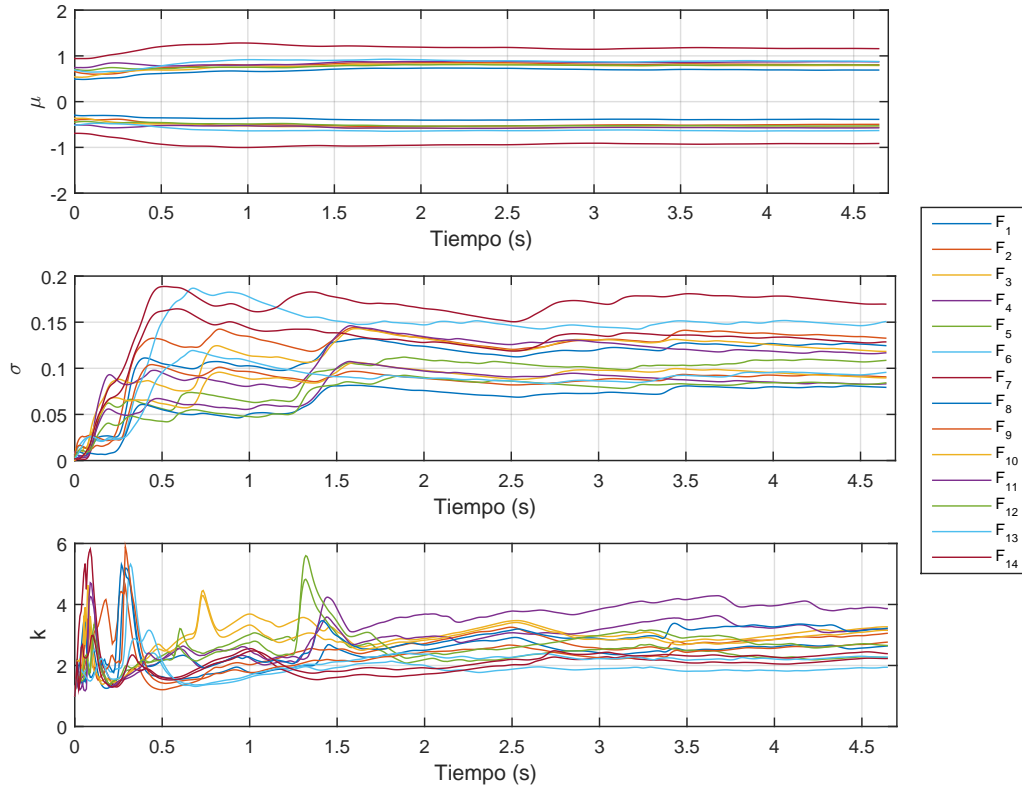


Figura 3.19 Valor de los estadísticos para los primeros instantes de tiempo.

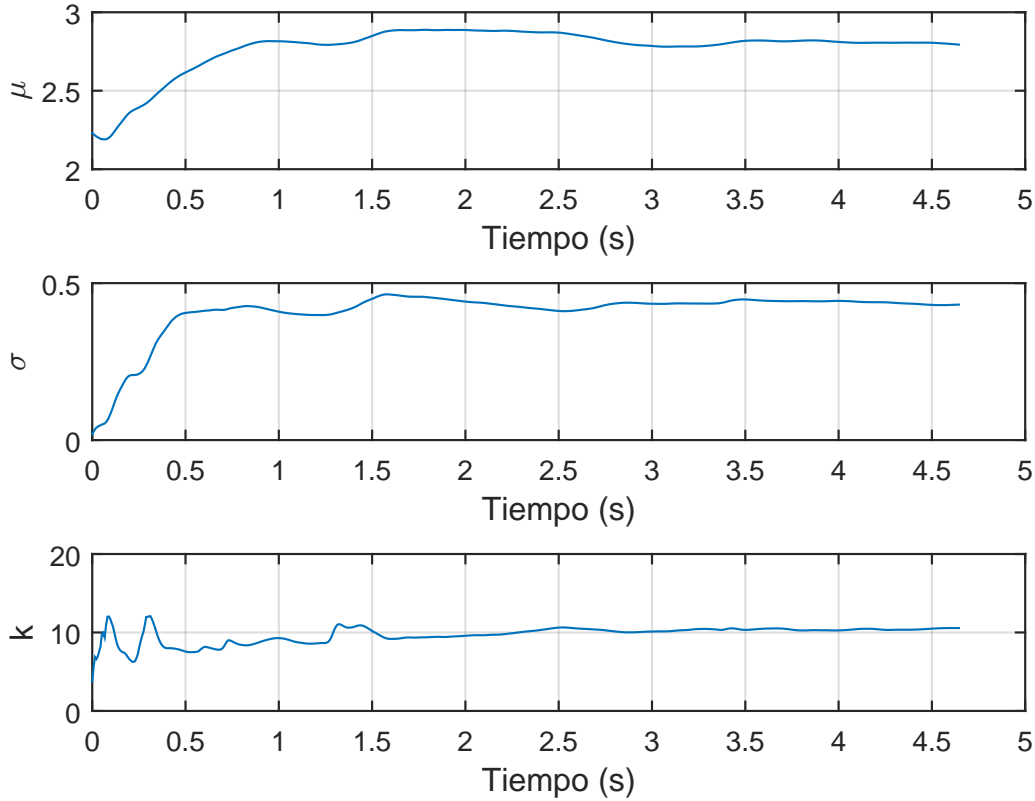


Figura 3.20 Valor de la norma de los estadísticos para los primeros instantes de tiempo.

Por supuesto, se ha de tener en cuenta que aquí sólo se presta atención al ajuste distribucional, es decir, a las propiedades estadísticas de las series temporales, no a las propiedades espectrales. Este estudio es muy útil, por ejemplo, cuando se van a realizar cálculos para estructuras realizando simulaciones cuasi-estáticas, como es el caso del presente documento.

Obsérvese, por ejemplo, que a efectos de este análisis, basta con realizar $t = 4,64$ s, teniendo en cuenta que el tiempo simulado original era de $T = 300,00$ s, esto constituye un coste computacional del 1.53 % respecto al original, lo que resulta extraordinario. A partir de los datos obtenidos y con los ajustes paramétricos realizados, se pueden realizar simulaciones tan largas como se desee con el mismo contenido estadístico (para que tengan el mismo contenido espectral, hay que realizar también un análisis de los parámetros del modelo VAR, pero a menudo, para órdenes bajos, el modelo funciona muy bien).

Observando detenidamente la Figura 3.20, puede verse que el coeficiente de curtosis arroja más información sobre el contenido estadístico de las señales. Aunque cualitativamente esta información no es sustancialmente diferente a la arrojada, por ejemplo por la cuasi-desviación típica (se observa que a partir de 1.5 s, donde existe cierta desestabilización, la tendencia es estable), sí que muestra que cada serie de datos tiene una estadística propia, que no puede ser capturada mediante un modelo biparamétrico (en particular el modelo normal resulta insuficiente). Más en detalle, se observa que la cuasi-desviación típica es estable para todas las series (salvo quizás la 14) a partir de $t_1 = 2$ s, mientras que el coeficiente de curtosis sigue creciendo hasta estabilizarse a los $t_2 = 3.5$ s. Cualitativamente, esto significa que aunque cierta variabilidad ha sido capturada en t_1 , no es hasta t_2 cuando se captura variabilidad de un orden superior. Evidentemente, para capturar la total

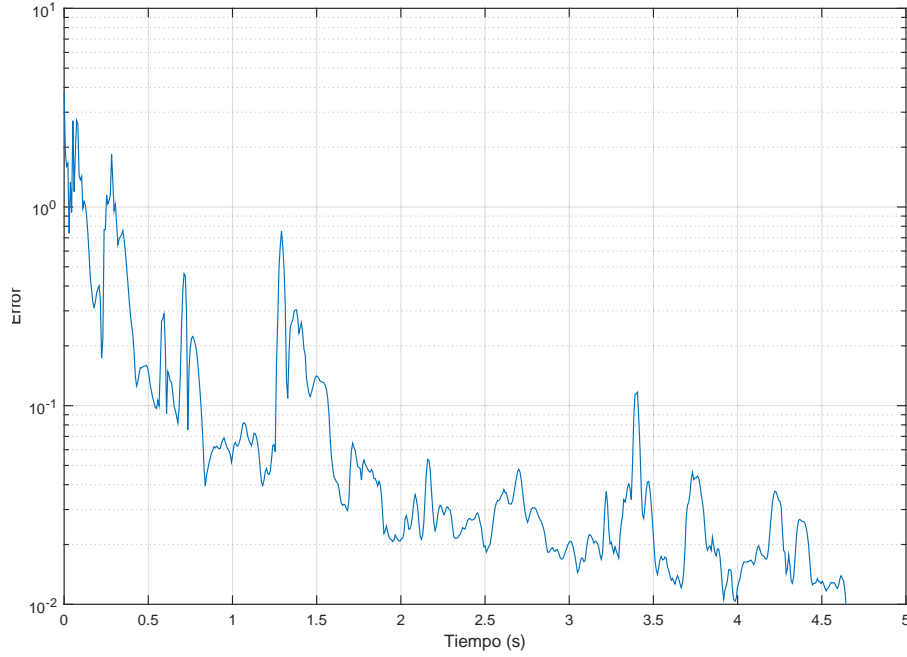


Figura 3.21 Valor del error para los primeros instantes de tiempo.

variabilidad se necesitaría una muestra de tamaño infinito, lo cual en la práctica es imposible. El interés de este análisis basado en **momentos de orden superior** es satisfacer las exigencias del modelo triparamétrico propuesto.

3.3.3 Interpretación

Es habitual en los túneles de viento reales o en los cálculos virtuales realizar un análisis del coeficiente de fuerzas o de presiones basado en tres estadísticos:

1. El valor medio.
2. La desviación típica.
3. El máximo.

Aquí cabe preguntarse si realmente el máximo es un valor interesante a efectos de diseño. Desde luego, si la carga afecta directamente el diseño esto es evidente. Obsérvese sin embargo que la mayoría de las veces no interesa el valor del vector aleatorio de cargas \mathbf{X} sino un conjunto de variables de diseño \mathbf{Y} (tensiones en secciones, deformaciones en elementos...) de forma que $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. El conocimiento del máximo de \mathbf{X} ya no es tan importante, puesto que la transformación \mathbf{F} mezcla la incertidumbre, de forma que el máximo de cada una de las componentes de \mathbf{Y} depende de

- Las distribuciones de cada una de las componentes del vector \mathbf{X} .
- La simultaneidad y compatibilidad de las variables, esto es, su dependencia, y en términos lineales, su correlación.
- Las características de la función \mathbf{F} .

Para el caso en que \mathbf{F} sea lineal, se puede expresar $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ y son conocidas expresiones que relacionan los momentos de \mathbf{Y} con los momentos de \mathbf{X} . Por ejemplo, para si $\mu(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ y se define el **tensor momento centrado de orden n** cuyas componentes son $\Omega_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^n (X_{i_k} - \mathbb{E}[X_{i_k}])]$, se tiene

$$\mu(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mu(\mathbf{X})$$

Y para el tensor momento de orden n, usando la notación de Einstein

$$\Omega_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{Y}) = A_{i_1, j_1} A_{i_2, j_2} \cdots A_{i_n, j_n} \Omega_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{X})$$

Así, los momentos de \mathbf{Y} pueden expresarse en función de los momentos de \mathbf{X} y como cuantos más momentos se conocen de \mathbf{Y} , más se conoce su distribución⁴, el conocimiento de los momentos de \mathbf{X} es fundamental para estimar o directamente *reconstruir* la distribución de \mathbf{Y} , a partir de sus momentos. El máximo de una distribución corresponde al valor de $\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]$ cuando $n \rightarrow \infty$ por lo que las fórmulas anteriores no pueden utilizarse; es un momento, o una métrica⁵, demasiado alta. Otros momentos de orden superior, como el de orden 3 y orden 4, pueden arrojar algo más de luz de lo que arroja el momento de orden 2, sin que la interpretación se distorsione en el paso al límite.

3.4 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha presentado un modelo paramétrico, denominado VAR-LWB para la modelización de las variaciones del coeficiente de las $n = 14$ fuerzas nodales en los $K = 7$ nodos de la estructura. Este modelo supone que $C_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ son procesos estocásticos estacionarios y ergódicos, distribuidos según una familia *Weibull desplazada* triparmétrica $\mathcal{LW}(\theta, \lambda, k)$, donde cada parámetro se ajusta para la serie considerada, y cuya dependencia temporal se ha modelizado mediante un modelo vectorial autorregresivo de orden p . Dicho modelo demuestra ser razonablemente bueno para representar los coeficientes de presiones en un marco probabilístico ya que:

- Captura bien los parámetros estadísticos de cada una de las series. El ajuste es especialmente bueno para capturar estadísticos de rendimiento directo como la media μ .
- Captura muy bien la dependencia lineal entre variables y razonablemente bien la dependencia no lineal, especialmente para series temporales muy cercanas espacialmente.
- Sirve como un primer modelo simplificado para capturar la dependencia temporal, es decir, la densidad espectral de cada una de las señales. Aunque se pierde contenido frecuencial, el modelo es perfectamente válido para propósitos que involucren simulaciones de tipo cuasi-estático.
- Puede ayudar al ahorro de tiempo computacional a la hora de realizar simulaciones mediante técnicas de CFD.

En el Capítulo 4 se verá que el principal factor que influye en la incertidumbre de las fuerzas F_i es el valor de la velocidad media del viento, V , por lo que este modelo resulta satisfactorio para el ámbito de estudio considerado.

⁴ El caso extremo es que si una distribución posee todos sus momentos finitos es equivalente conocer los momentos (y por tanto su función característica) a conocer su función de distribución. Esto se conoce como **teorema de inversión de Levy**

⁵ Recuérdese que el operador esperanza define una norma en el espacio de las variables aleatorias: $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$

4 Análisis de la incertidumbre en el modelo V-C

Uncertainty is an uncomfortable position. But certainty is an absurd one.

IMMANUEL KANT, 1694 - 1778

En los dos capítulos anteriores se ha construido el modelo denominado como **Modelo C - V** que consiste en una expresión que relaciona la fuerza nodal ejercida sobre el grado de libertad i con dos variables aleatorias, cuya fluctuación se realiza en escalas temporales diferentes: el coeficiente de fuerzas C_{F_i} y la velocidad del viento V . Físicamente, esto corresponde a la escala de variación meteorológica y a la escala de variación de la turbulencia.

Como los modelos presentados para la velocidad del viento son mucho más potentes y certeros que los presentados para el coeficiente de presiones, restaría por analizar si dicho coeficiente tiene un efecto *demandado decisivo* en la incertidumbre del proceso estocástico $F_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ o por el contrario el modelo presentado ya es adecuado. A dicho estudio se dedicará este capítulo.

En primer lugar se realizará un estudio teórico de la propagación de la incertidumbre en la ecuación matemática que liga todas las variables implicadas. En este caso, con *propagación de la incertidumbre* se asume implícitamente que se analizará la incertidumbre según la teoría clásica de momentos de orden dos. Dicho de otro modo, además de estudiar cómo se relacionan las propiedades de tendencia central (esperanza) de las variables F_i , $i = 1, \dots, N$ con las de C_i , $i = 1, \dots, N$ y V , se analizará la propagación de la incertidumbre cuadrática (varianza / desviación típica). Del mismo modo, la interdependencia entre variables se evaluará realizando un análisis de las covarianzas, o bien del coeficiente de correlación lineal.

Finalmente, tras un estudio general, se estudiará el modelo C - V en particular, utilizando las distribuciones y los modelos para C_i y V presentados en los dos capítulos anteriores. Así, podrán analizarse las debilidades y fortalezas de considerar la incertidumbre de cada una de las variables aleatorias implicadas en relación con el conocimiento de las fuerzas nodales.

4.1 Introducción

Se ha asumido una relación cuadrática entre la fuerza en uno de los grados de libertad F_i y la velocidad característica del viento V

$$F_i = \frac{1}{2} C_{F_i} \rho A V^2 \quad (4.1)$$

Aquí $C_{F_i} = C_i$ es el coeficiente de sustentación o de arastre, según qué dirección de la fuerza se considere, asociado a las cargas sobre un nodo determinado, i . Por simplicidad se ha prescindido de la notación del subíndice F_i , y se ha utilizado únicamente i como subíndice. Como ya se ha comentado, $C_i = C_i(t)$ puede entenderse como un proceso estocástico (o en su versión discreta, como una serie temporal) cuyo espectro

depende del espectro de turbulencia utilizado. El objetivo es relacionar las propiedades de las variables aleatorias F_i con las de las variables aleatorias C_i y V .

Se asume por lo tanto el modelo siguiente

$$F_i(t) = \frac{1}{2} \rho C_i(t) V^2 \quad (4.2)$$

donde $F_i(t)$ es la variable aleatoria dependiente de la fuerza nodal sobre el nodo i y $C_i(t)$ es la variable independiente explicativa que representa el coeficiente de fuerzas asociado al grado i y V es la variable aleatoria independiente explicativa que representa la velocidad del viento. Por último sin pérdida de generalidad, $k = \rho A$ es un coeficiente determinista. Dicho de otro modo

$$F_i(t) = g(C_i(t), V) \quad (4.3)$$

$$\text{con } g(x, y) = \frac{1}{2} k x y^2.$$

Defínase $\mathbb{E}[F_i(t)] = \mu_{C_i}(t)$, $\mathbb{E}[V] = \mu_V$, $V(C_i(t)) = \sigma_{C_i}^2(t)$, $V(V) = \sigma_V^2$, $\text{COV}(C_i(t), V) = \rho_{C_i V}(t) \sigma_{C_i}(t) \sigma_V$ y $\text{COV}(C_i(t), C_j(t)) = \rho_{C_i C_j}(t) \sigma_{C_i}(t) \sigma_{C_j}$, propiedades conocidas de las variables aleatorias. Como $C_i(t)$ es un proceso estacionario, sus estadísticos no dependen de t y $\mu_{C_i}(t) = \mu_{C_i}$, $\sigma_{C_i}^2(t) = \sigma_{C_i}^2$. Por último, como las variables $C_i(t)$ y V son independientes $\forall t$, $\rho_{C_i V}(t) = 0$.

4.2 Cálculos teóricos

4.2.1 Expresión lineal

Puede aproximarse el valor esperado de la variable aleatoria F_i utilizando el desarrollo de Taylor de orden 1 [59]:

$$\mathbb{E}[F_i(t)] \simeq g(\mu_{C_i}, \mu_V) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\mu_{C_i}, \mu_V) \sigma_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\mu_{C_i}, \mu_V) \sigma_V^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\mu_{C_i}, \mu_V) \sigma_{C_i} \sigma_V \rho_{C_i V} \quad (4.4)$$

Así, se obtiene

$$\mathbb{E}[F_i(t)] \simeq \frac{1}{2} k \mu_{C_i} (\mu_{C_i}^2 + \sigma_{C_i}^2) + \mu_V \sigma_{C_i} \sigma_V \rho_{C_i V} \quad (4.5)$$

Si C_i y V son independientes (en realidad basta con que no estén correlacionadas), como es el caso

$$\mathbb{E}[F_i(t)] \simeq \frac{1}{2} k \mu_{C_i} (\mu_V^2 + \sigma_V^2) \quad (4.6)$$

Análogamente se puede aproximar la varianza y la desviación típica de F_i usando el desarrollo de Taylor de orden 1:

$$V(F_i(t)) \simeq \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_{C_i}, \mu_V) \right)^2 \sigma_{C_i}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_{C_i}, \mu_V) \right)^2 \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_{C_i}, \mu_V) \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_{C_i}, \mu_V) \right) \sigma_{C_i} \sigma_V \rho_{C_i V} \quad (4.7)$$

Así

$$V(F_i(t)) \simeq \frac{1}{4} k^2 \mu_V^2 (\mu_{C_i}^2 \sigma_{C_i}^2 + \mu_{C_i}^2 \sigma_V^2) + \mu_{C_i} \mu_V^3 \sigma_{C_i} \sigma_V \rho_{C_i V} \quad (4.8)$$

Si C_i y V son independientes o al menos no están correlacionadas

$$V(F_i(t)) \simeq \frac{1}{4} k^2 \mu_V^2 (\mu_{C_i}^2 \sigma_{C_i}^2 + \mu_{C_i}^2 \sigma_V^2) \quad (4.9)$$

En definitiva, el proceso $F_i(t)$ es estacionario en el sentido débil (media y desviación típica independientes de t) y

$$\begin{aligned}\mu_{F_i} &\simeq \frac{1}{2}k\mu_{C_i}(\mu_V^2 + \sigma_V^2) \\ \sigma_{F_i} &\simeq \frac{1}{2}k\mu_V \sqrt{\mu_V^2 \sigma_{C_i}^2 + \mu_{C_i}^2 \sigma_V^2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

4.2.2 Expresión exacta para variables independientes

Expresión de la esperanza

Suponiendo que C_i y V son independientes, también lo son C_i y V^2 por lo tanto

$$\mathbb{E}[F_i(t)] = \frac{1}{2}k\mathbb{E}[F_i(t)]\mathbb{E}[V^2] \quad (4.11)$$

Así, puede escribirse

$$\mathbb{E}[F_i(t)] = \frac{1}{2}k\mu_{C_i}\mathbb{E}[V^2] \quad (4.12)$$

Se observa que la expresión lineal basada en el desarrollo de Taylor ya bastaba para estimar la media de la variable F_i .

Expresión de la varianza

En cuanto a la varianza

$$V(F_i(t)) = \frac{1}{4}k^2 [\mathbb{E}[C_i(t)^2]\mathbb{E}[V^4] - \mathbb{E}[C_i(t)]^2\mathbb{E}[V^2]^2] \quad (4.13)$$

por lo tanto

$$V(F_i(t)) = \frac{1}{4}k^2 [(\sigma_{C_i}^2 + \mu_{C_i}^2)\mathbb{E}[V^4] - \mu_{C_i}^2\mathbb{E}[V^2]^2] \quad (4.14)$$

A diferencia del caso de la esperanza, se necesitan parámetros estadísticos de orden superior para capturar la incertidumbre de la variable F_i relacionándola con la de la variable C_i .

Expresión de la correlación lineal

Finalmente, se calcula la correlación entre las variables F_i y F_j :

$$\begin{aligned}\text{COV}(F_i, F_j) &= \mathbb{E}[F_i F_j] - \mathbb{E}[F_i]\mathbb{E}[F_j] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\rho C_i V^2 \frac{1}{2}\rho C_j V^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\rho C_i V^2\right]\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\rho C_j V^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 (\mathbb{E}[C_i C_j V^4] - \mathbb{E}[C_i V^2]\mathbb{E}[C_j V^2]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 (\mathbb{E}[C_i C_j]\mathbb{E}[V^4] - \mathbb{E}[C_i]\mathbb{E}[V^2]\mathbb{E}[C_j]\mathbb{E}[V^2]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 \left[(\text{COV}(C_i, C_j) + \mu_{C_i}\mu_{C_j})\mathbb{E}[V^4] - \mu_{C_i}\mu_{C_j}\mathbb{E}[V^2]^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\right)^2 \left[\text{COV}(C_i, C_j)\mathbb{E}[V^4] + \mu_{C_i}\mu_{C_j}(\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)\right]\end{aligned}$$

Esta expresión, junto con la Ecuación (4.14) conduce a

$$\rho_{F_i F_j} = \frac{\text{COV}(C_i, C_j) \mathbb{E}[V^4] + \mu_{C_i} \mu_{C_j} (\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^4] \sigma_{C_i}^2 + \mu_{C_i}^2 (\mathbb{E}[Y^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)} \sqrt{\mathbb{E}[Y^4] \sigma_{C_j}^2 + \mu_{C_j}^2 (\mathbb{E}[Y^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)}} \quad (4.15)$$

Dicha expresión resulta más esclarecedora si se divide numerador y denominador por $\sigma_{C_i} \sigma_{C_j} (\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)$, obteniendo

$$\rho_{F_i F_j} = \frac{\rho_{C_i C_j} \kappa_V^{-1} + \frac{\mu_{C_i} \mu_{C_j}}{\sigma_{C_i} \sigma_{C_j}}}{\sqrt{\kappa_V^{-1} + \frac{\mu_{C_i}^2}{\sigma_{C_i}^2}} \sqrt{\kappa_V^{-1} + \frac{\mu_{C_j}^2}{\sigma_{C_j}^2}}} = \frac{\rho_{C_i C_j} CV_i CV_j + \kappa_V}{\sqrt{CV_i^2 + \kappa_V} \sqrt{CV_j^2 + \kappa_V}} \quad (4.16)$$

Donde $\kappa_V = \frac{\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2}{\mathbb{E}[V^4]}$ es un indicador de la variabilidad de V ya que si V es determinista, $\kappa_V \rightarrow 0$ y $\rho_{F_i F_j} \rightarrow \rho_{C_i C_j}$ y CV_i y CV_j son respectivamente los coeficientes de variación de las variables C_i y C_j . Queda claro por lo tanto que la variabilidad de V tiene un impacto decisivo sobre la correlación entre fuerzas: a mayor variabilidad, mayor atenuación del coeficiente de correlación, siempre por encima del coeficiente de correlación $\rho_{C_i C_j}$. Por otro lado, la variabilidad de C_i y C_j repercute también en el coeficiente de correlación de la misma forma, sólo que esta vez no existe un límite inferior para el mismo.

Caracterización de los procesos F_i

En resumen los procesos $F_i(t)$ son estacionarios en el sentido débil y

$$\mu_{F_i} = \frac{1}{2} k \mu_{C_i} (\mu_V^2 + \sigma_V^2) \quad (4.17)$$

$$\sigma_{F_i} = \frac{1}{2} k \sqrt{\sigma_{C_i}^2 \mathbb{E}[V^4] + \mu_{C_i}^2 (\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2)} \quad (4.18)$$

$$\rho_{F_i F_j} = \frac{\rho_{C_i C_j} CV_i CV_j + \kappa_V}{\sqrt{CV_i^2 + \kappa_V} \sqrt{CV_j^2 + \kappa_V}} \quad (4.19)$$

$$(4.20)$$

Obsérvese que si se supone que el proceso F_i es gaussiano, las expresiones anteriores **caracterizan completamente** las variables de entrada. No obstante, en general esto no tiene por qué ser cierto, aunque puede utilizarse como primera aproximación. Las expresiones anteriores constituyen una radiografía del vector de cargas en términos cuadráticos, lo que permitiría, como se verá en capítulos posteriores, resolver problemas de programación estocástica mediante técnicas de optimización cuadrática..

4.3 Estudio teórico de la variabilidad del modelo

Antes de proceder a un análisis basado en los resultados de las simulaciones, se verá en qué quedan las Ecuaciones (4.17) cuando se supone que alguna de las variables implicadas es determinista.

4.3.1 Variable V determinista

En este caso se impone $V = v$, con lo que $\mu_V = v$, $\sigma_V = 0$, $\mathbb{E}[V^4] = v^4$ y $\kappa_V = 0$. Así, las Ecuaciones (4.17) quedan

$$\mu_{F_i} = \frac{1}{2} k \mu_{C_i} v^2 \quad (4.21)$$

$$\sigma_{F_i} = \frac{1}{2} k \sigma_{C_i} v^2 \quad (4.22)$$

$$\rho_{F_i F_j} = \rho_{C_i C_j} \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

En definitiva, lo que sucede es que se amplifica en v^2 tanto el valor de la media como de la varianza del proceso, quedando las correlaciones idénticas. El proceso simplemente sufre una **amplificación lineal**.

4.3.2 Variable C_i determinista

En este caso se impone $C_i = c_i$, con lo que $\mu_{C_i} = c_i$, $\sigma_{C_i} = 0$ y $CV_i = CV_j = 0$. Así, las Ecuaciones (4.17) quedan

$$\mu_{F_i} = \frac{1}{2} k c_i (\mu_V^2 + \sigma_V^2) \quad (4.25)$$

$$\sigma_{F_i} = \frac{1}{2} k c_i \sqrt{\mathbb{E}[V^4] - (\mu_V^2 + \sigma_V^2)^2} \quad (4.26)$$

$$\rho_{F_i F_j} = 1 \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

En este caso, el valor de las fuerzas medias se incrementa no sólo debido al efecto de la elevación al cuadrado, sino al contagio de incertidumbre por aparecer σ_V^2 en la expresión. La varianza de las fuerzas, por otra parte, dependen de estadísticos de orden superior, no únicamente de la varianza, de ahí que resulte **fundamental** un análisis de la distribución de V basado en estadísticos de orden superior. En este documento dicho análisis está implícito en la utilización de distribuciones mixtas de tres o más parámetros. Las variables que se obtienen, no obstante, están perfectamente correlacionadas, como cabría esperarse. El vector de cargas, aunque posee formalmente varios grados de libertad, **es esencialmente univariado**.

4.3.3 Caso general

El caso general no corresponde a ninguno de los dos casos anteriores, sino que presenta la complejidad de ambos a la vez además de otros efectos sinérgicos. En cualquier caso, se observa que así como el conocimiento de la estadística de orden dos del proceso C_i es suficiente para conocer la estadística de orden dos del proceso F_i , no sucede lo mismo con la estadística de orden dos de V . De aquí se desprende una conclusión fundamental: **cualquiera que sea el modelo estadístico que se quiera utilizar para caracterizar el proceso F_i , deberá ser especialmente cuidadoso con el tratamiento de la distribución de V .**

En este documento, esto se ha llevado a cabo mediante un ajuste muy fino, basado en técnicas presentes en el estado del arte actual, de la distribución de velocidades del viento.

4.4 Simulaciones con el modelo propuesto

En esta última sección se va a realizar un análisis más en detalle de la incertidumbre del modelo C - V utilizando los modelos utilizados en este documento. Hasta ahora se ha realizado un análisis de la incertidumbre cuadrática, que no depende de las distribuciones ni modelos utilizados para los ajustes, se dice que dichos resultados son *libres de distribución* (*distribution free*). Estos resultados no permiten caracterizar los procesos en términos distribucionales, pero sí que dan información sobre estadísticos básicos (en este caso la media, la desviación típica y los coeficientes de correlación lineales).

En lo que sigue se tratará de ir un paso más allá y realizar un análisis distribucional, para ello, es necesario establecer unas hipótesis de partida sobre las variables V y C_i en términos de las distribuciones. Dichas hipótesis no son otras que las planteadas en el Capítulo 2 y 3, con algunas variantes.

Para la generación de las series mediante simulación, en ambos casos se ha utilizado un modelo vectorial autorregresivo. Dicho modelo fue ampliamente explicado para el caso de las variables C_i en el Capítulo 3. El procedimiento para la generación de la serie temporal de V es análogo, pero menos complejo, ya que es univariado. Los datos utilizados para el ajuste de la velocidad del viento son los registrados en el puerto de Cádiz en el año 2014, velocidad media diezminutal, medida a 10m de altura. Los ajustes llevados a cabo para esta serie hace que los parámetros del modelo adopten los valores siguientes:

$$\begin{aligned}u_1 &= 1.7401 \text{ m/s} \\u_2 &= 12.4712 \text{ m/s} \\\lambda &= 7.1530 \text{ m/s} \\k &= 2.0236 \\\xi &= -0.0385\end{aligned}$$

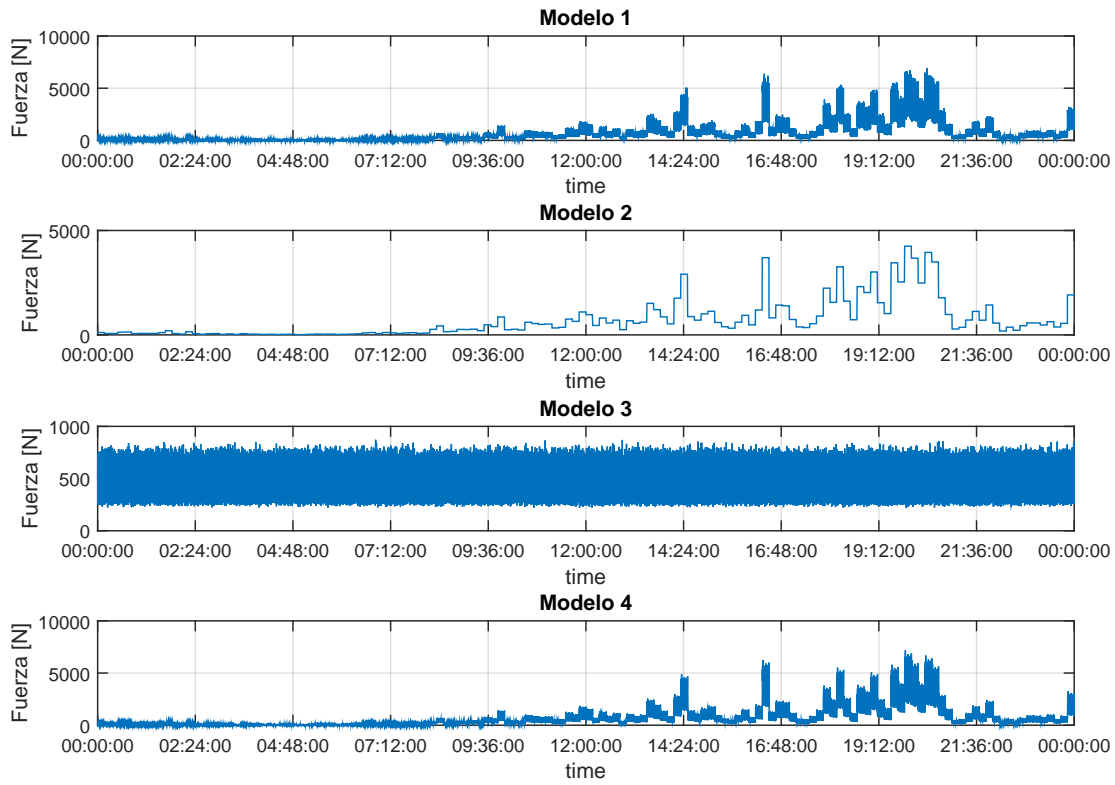
Estos datos son los mismos que será usados en el ejemplo demostrativo que se realizará a cabo en la Parte III de este documento.

4.4.1 Escenarios planteados

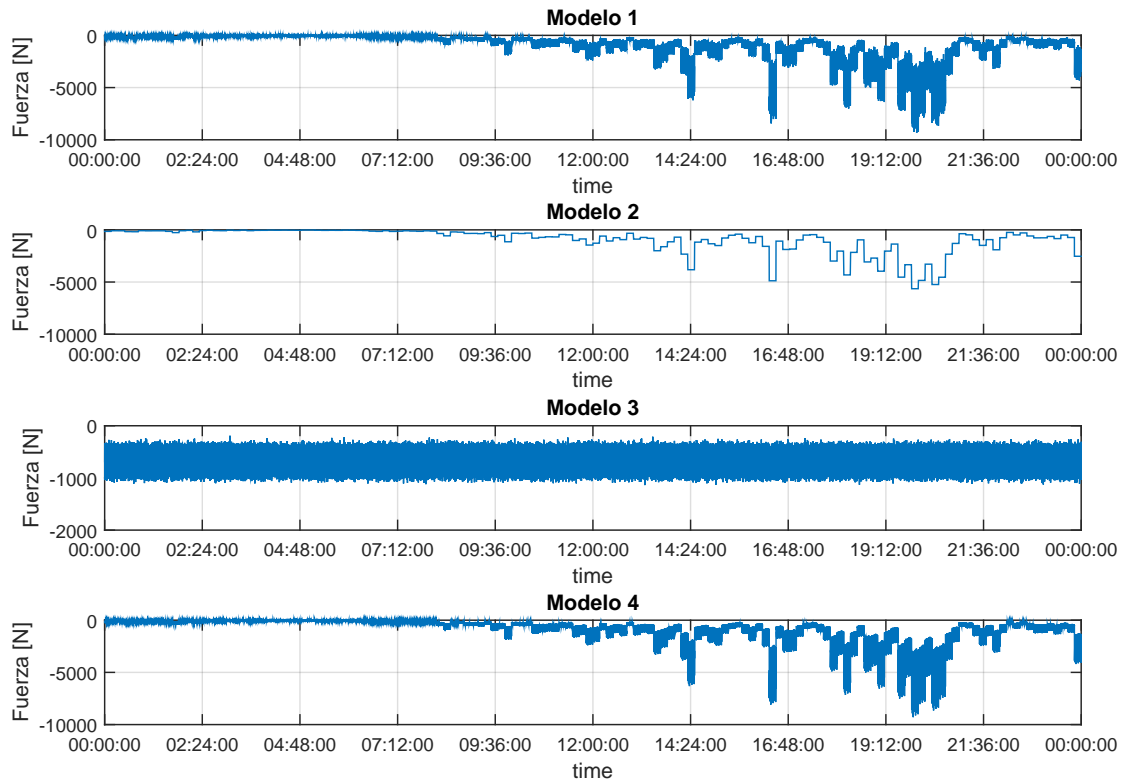
Con el fin de llevar a cabo un análisis de la incertidumbre del modelo, se van a comparar cuatro modelos probabilísticos diferentes que podrían utilizarse para replicar las cargas nodales (es decir, las $N = 14$ series temporales):

1. El **Modelo C - V** descrito en los dos capítulos anteriores. Dicho modelo es el más completo a priori, ya que considera la incertidumbre de la velocidad del viento y la del coeficiente de presiones. Dicho modelo se denominará **Modelo 1**.
2. Un modelo en el que se considera únicamente la **incertidumbre en la velocidad del viento**, considerándose el **coeficiente de fuerzas constante** a lo largo del mismo. Esta consideración suele ser habitual en diseño estructural cuando se está del lado de la seguridad, donde a cada cuerpo como se le suele asociar un coeficiente de fuerza (C_D para el arrastre, *drag*, en la dirección del flujo y C_L para la sustentación, *lift*, perpendicular al flujo) que se considera constante a efectos de solicitaciones. A este modelo se le denominará **Modelo 2**.
3. Un modelo en el que se considera la **incertidumbre en el coeficiente de fuerzas**, considerándose la **velocidad del viento constante**, igual a la velocidad media del mismo \bar{V} . Este tipo de modelos no se usa, ya que habitualmente (y como se verá a continuación), está claramente del lado de la inseguridad. Suele ser habitual, no obstante, sustituir el valor de la velocidad media por un valor característico $V^* = k\bar{V}$, $k > 1$, que corresponda a un determinado periodo de retorno. En el marco presentado en este documento, el valor de k podría calibrarse cruzando este modelo con el Modelo 1. A este modelo (con la velocidad media) se le denominará **Modelo 3**.
4. Un modelo en el que se supone la **incertidumbre en ambas variables aleatorias**, V y C_i , $i = 1 \dots N$. La diferencia respecto al primer modelo es que en este caso se toma siempre la misma realización para C_i , no diferentes realizaciones obtenidas mediante cálculo CFD o mediante simulación estadística (como se vio en capítulos anteriores esto es infinitamente menos costoso computacionalmente). Es de esperar, dada las hipótesis del modelo (estacionariedad y ergodicidad para las variables C_i), que este modelo arroje resultados muy similares al modelo C - V, ya que en una sola realización está contenida toda la estadística del proceso. No obstante, a efectos de comparación, se incluye aquí para que pueda analizarse la incertidumbre suplementaria que se genera con el modelo estadístico. Este modelo se denominará **Modelo 4**.

Para comparar los cuatro modelos, se han generado series de duración un día en el que la frecuencia de muestreo es de $f = 13.5 \text{ Hz}$ de muestreo utilizando cada uno de ellos. En la Figura 4.1 se muestran dichas series para dos de las $N = 14$ fuerzas nodales (se ha escogido una fuerza horizontal, correspondiente al grado de libertad 1 y una vertical, correspondiente al grado de libertad 14, que además son series cuyos nodos de acción están alejados), con el fin de ilustrar la diferencia entre los modelos.



(a) Serie 1.



(b) Serie 14.

Figura 4.1 Series temporales de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos.

4.4.2 Análisis estadístico univariado

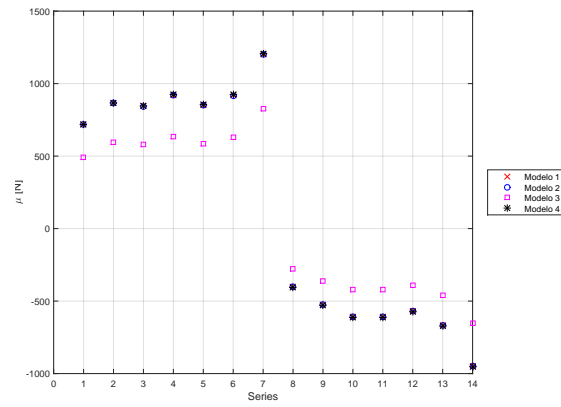
Estadísticos básicos

En primer lugar, en la Figura 4.2 se muestra para los cuatro modelos el valor de algunos estadísticos muestrales: la media μ indicadora de la tendencia central, la desviación típica σ y el intervalo intercuartil IQR , indicadoras de la dispersión, el coeficiente de asimetría sk , que caracteriza la asimetría, el coeficiente de curtosis k que caracteriza el apuntamiento de la distribución y el máximo de los valores absolutos (norma infinita) que ilustra el interés del modelo a efectos de diseño.

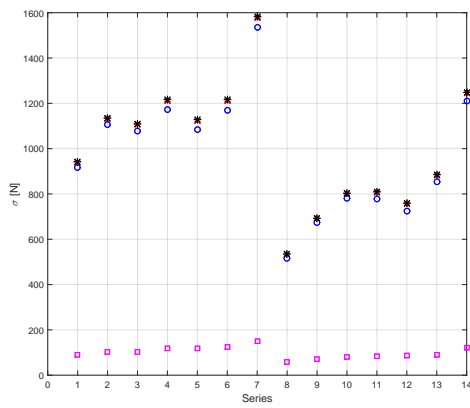
A la vista de los resultados, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- En cuanto a la tendencia central (Figura 4.2a) de las series, cualquiera de los modelos captura el fenómeno a grandes rasgos, aunque el Modelo 3, que sólo incorpora la variabilidad del coeficiente de fuerzas claramente está del lado de la inseguridad. Esto es fácilmente entendible, ya que al tener la velocidad del viento un impacto cuadrático, el efecto de la misma es magnificador, por pequeña que sea su variación. Esto se observa claramente en la primera línea de la Ecuación (4.17), ya que en el momento de segundo orden de la variable V está la contribución de la media de la variable V y la contribución de su varianza: $\mu_V^2 + \sigma_V^2$. Este es el efecto **directo** de no considerar la variabilidad de los agentes meteorológicos, en este caso el viento, en el cálculo estructural. El Modelo 2, que no considera la variabilidad del coeficiente de fuerzas, captura igual de bien la tendencia central de la serie, de acuerdo de nuevo con la Ecuación (4.17), donde se ve que la incertidumbre de la variable C_i no tiene efecto alguno sobre el régimen central.
- Considérese ahora la variabilidad en términos del error cuadrático, es decir, la desviación típica (Figura 4.2b). En este caso el Modelo 3 arroja unos resultados completamente diferentes a los otros tres modelos: aunque la variabilidad de la velocidad del viento no afecta en gran medida a la tendencia central, **afecta enormemente a la variabilidad de las fuerzas nodales**. De nuevo esto se observa en la Ecuación (4.17), en este caso en la segunda línea, en la que puede verse que aparecen momentos de hasta cuarto orden de la distribución de $Y = V$. Aunque el segundo término del radicando es tanto menor cuando se considere la velocidad poco variable (hasta anularse para el caso determinista), la primera es siempre no nula y en ella hay una fuerte contribución de la variabilidad. El primer término del radicando, no obstante, captura la incertidumbre (cuadrática) de la variable C_i , de ahí que el Modelo 2, que supone C_i determinista, muestre unos resultados en ligera discordancia con los del Modelo 1 o el Modelo 4. La Figura 4.2c, que ilustra (aunque de otra forma) la variabilidad de los coeficientes de fuerzas, no discrimina tanto entre los Modelos 1 y 4 y el Modelo 2, ya que es menos sensible a los extremos.
- Las diferencias en la propagación de la incertidumbre para los diferentes modelos es decisiva en el momento en que se analiza la simetría de las series (Figura 4.2d). En efecto, aunque cuantitativamente el signo del coeficiente de asimetría se conserve, considerar la incertidumbre del coeficiente de presiones, pero sobre todo de la velocidad del viento, la amplifica enormemente. Esto es **determinante** a efectos de diseño, ya que la asimetría de las fuerzas puede resultar clave en sistemas en los que los elementos o los materiales utilizados no resistan igual los esfuerzos de tracción o de compresión, como puede ser el caso de materiales pétreos, o de análisis que involucren modelos de fatiga mecánica o fractura.
- La Figura 4.2e y la Figura 4.2f reflejan lo que sucede con los modelos para momentos de orden superior¹. La conclusión general es que cuanto menos incertidumbre se considere en el modelo, más se ven afectadas las colas de la distribución, esto es, el régimen extremal. Evidentemente, esto tiene una **consecuencia directa sobre el diseño de sistemas**, en especial si estas se dimensionan a rotura o agotamiento de la resistencia. Es importante señalar que aunque no considerar la variabilidad del coeficiente de fuerzas tiene poco efecto sobre los momentos de orden bajo, es decir, sobre el régimen medio, puede tener un efecto notable en el análisis del régimen extremal y por lo tanto en el fallo estructural. Únicamente el Modelo 1 y el Modelo 4 capturan suficientemente bien la estadística extremal.

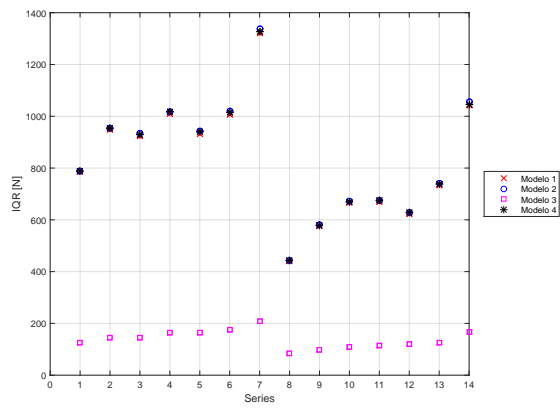
¹ Aunque el coeficiente de curtosis y el máximo no son métricas comparables, el primero está relacionado con el momento de orden 4, la potencia cuarta de la norma L_4 , que se adimensionaliza con la desviación típica



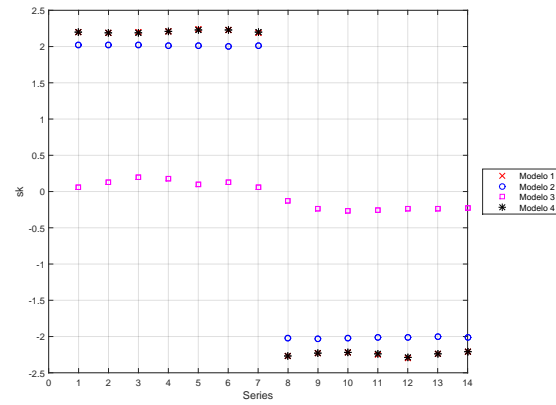
(a) Media.



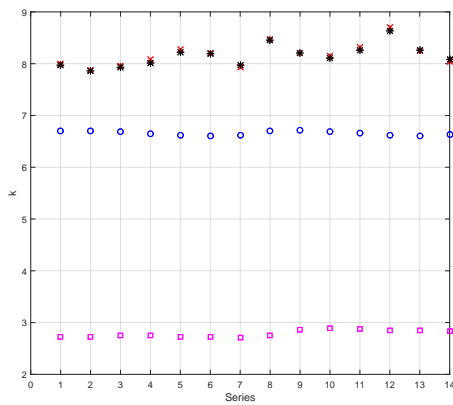
(b) Desviación típica.



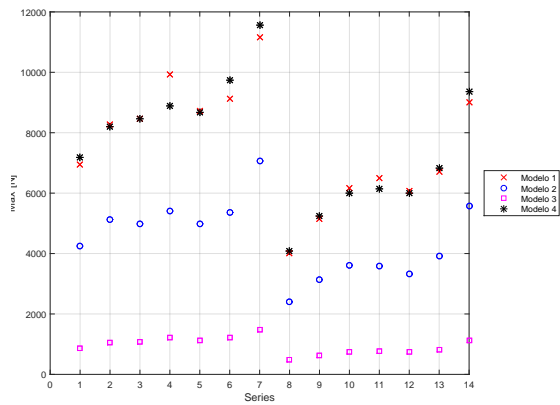
(c) Intervalo intercuartil.



(d) Coef. asimetría.



(e) Coef. curtosis.



(f) Máximo.

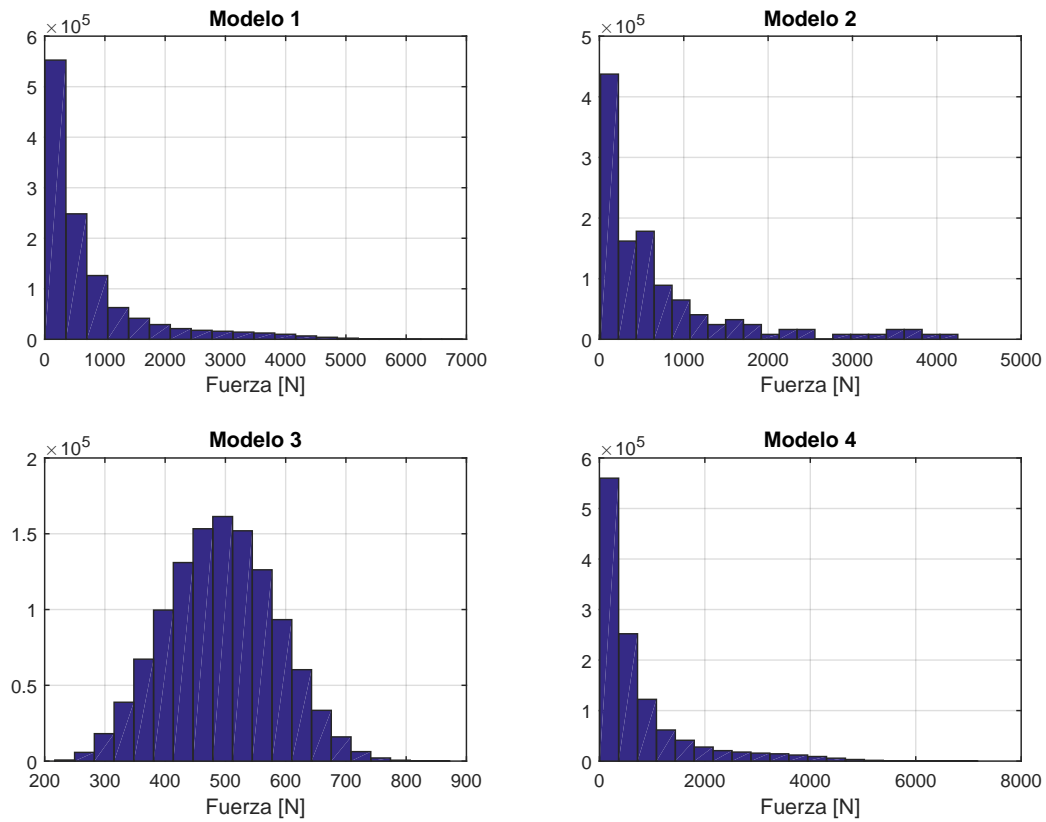
Figura 4.2 Comparación de algunos estadísticos para los 4 modelos.

Comparativa de las distribuciones

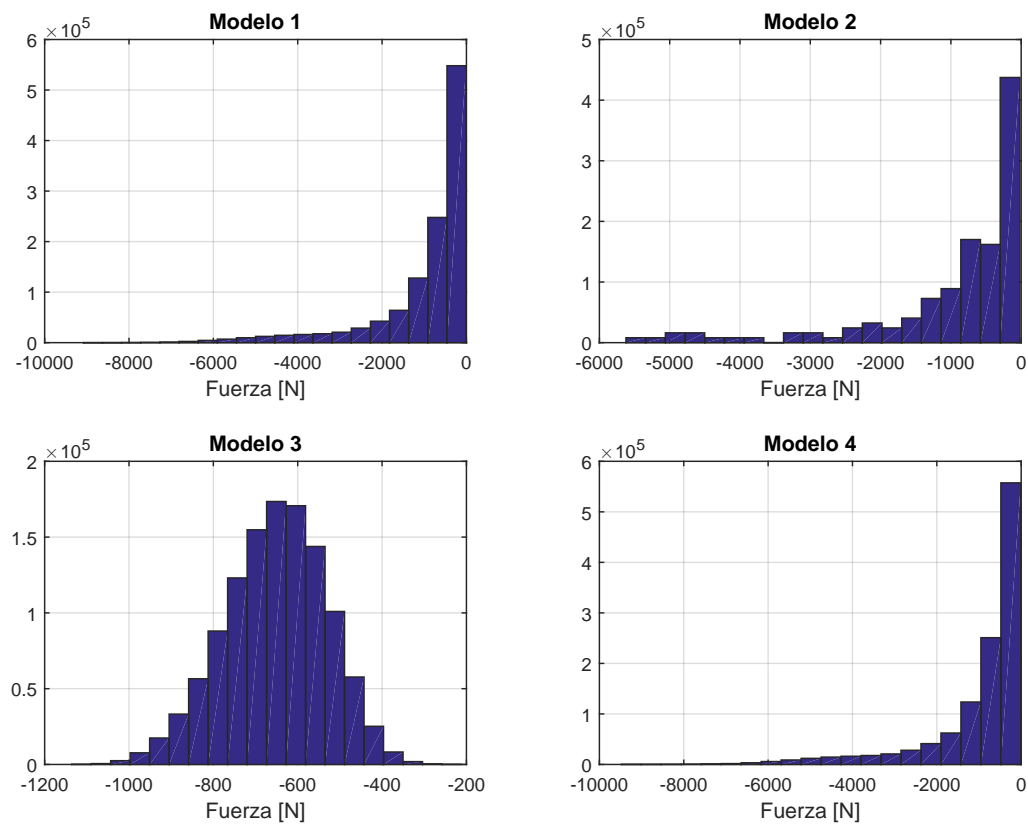
Para completar el análisis, se muestran como casos representativos algunos gráficos que ponen de manifiesto las diferencias entre las distribuciones para los cuatro modelos. De nuevo, como ejemplo ilustrativo, se considerarán las series correspondientes a los grados de libertad 1 y 14. La Figura 4.3 muestra un histograma de dichas series para los cuatro modelos mientras que la Figura 4.4 muestra los diagramas en caja.

De acuerdo con ambas figuras, queda patente que

- El Modelo 3 es una propagación determinista pura de la variabilidad del coeficiente de fuerzas, que no es la dominante en el sistema considerado. Aunque captura razonablemente bien el régimen central de la distribución, fracasa completamente al representar la dispersión, la simetría o la frecuencia de aparición de valores extremos.
- Introducir la variabilidad del coeficiente de presiones tiene un pequeño efecto regularizador sobre la cola de la distribución, que es algo irregular debido al carácter mixto del modelo probabilístico de la velocidad del viento. Aun así este efecto es casi imperceptible.
- El Modelo 1 y el Modelo 4 muestran casi el mismo aspecto distribucional y frecuencial. Sólo se aprecia alguna diferencia entre ambos si se analizan las colas de las distribuciones, ligeramente más gruesas en el Modelo 4, y los valores atípicos en el diagrama en caja, más extremos en el Modelo 4 también. En cualquier caso, la frecuencia de valores atípicos es mucho mayor en ambos modelos que en el Modelo 2.

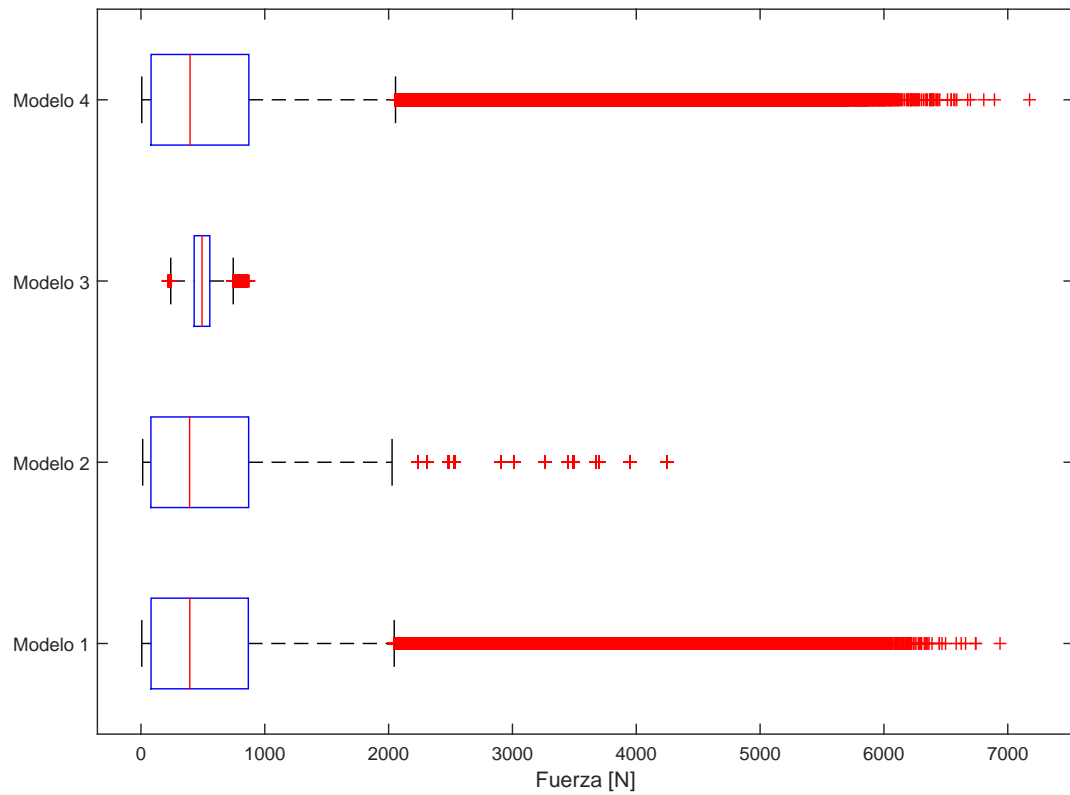


(a) Serie 1.

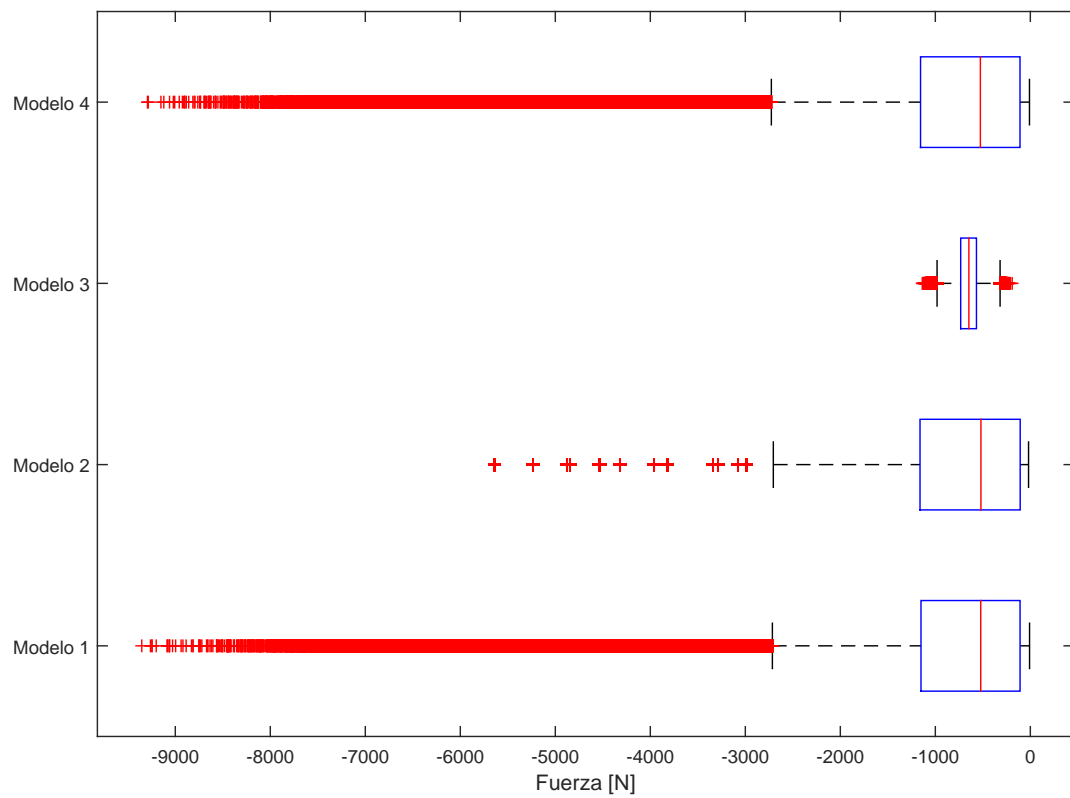


(b) Serie 14.

Figura 4.3 Histograma de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos.



(a) Serie 1.



(b) Serie 14.

Figura 4.4 Diagrama en caja de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos.

4.4.3 Análisis multivariado

Para analizar el carácter multivariado de cada uno de los modelos presentados se volverá a utilizar de nuevo el coeficiente de correlación lineal, ya que es con el que se ha trabajado en este documento principalmente. En la Figura 4.5, la Figura 4.6 y la Figura 4.7 se muestra la matriz coloreada de correlaciones de las series. Se ha dividido el análisis en tres para que las diferencias entre los modelos sean más apreciables, mostrando de forma separada la matriz de correlaciones mutuas de las primeras 7 series (grados de libertad horizontales), posteriormente las de las siguientes 7 series (grados de libertad verticales) y finalmente las correlaciones cruzadas entre ambas familias de series.

Del resultado se desprenden las conclusiones (esperables por otra parte) siguientes:

- El Modelo 2 reproduce series temporales **perfectamente correlacionadas**. Naturalmente, al no incorporar la variabilidad del coeficiente de presiones, la naturaleza multivariable del fenómeno se pierde completamente. Matemáticamente esto es consecuencia directa de la tercera línea de la Ecuación (4.17). Perder el carácter multivariable del proceso es inadmisibile, ya que el rendimiento del sistema no sólo depende de las distribuciones marginales, sino también de la simultaneidad, compatibilidad y combinación de las cargas. El rendimiento del sistema puede verse comprometido debido a estos efectos de carácter multivariado, ya que los esfuerzos internos de un elemento estructural, por ejemplo, dependen del estado de cargas nodales y su variabilidad de la variabilidad de dichas cargas nodales.
- El Modelo 3, aunque presenta un carácter multivariado, presenta una gama mucho más alta de valores en los coeficientes de correlación lineal. En este caso, la correlación no se amplifica por el efecto de la incertidumbre de V , como se explicó en apartados anteriores y se ilustra matemáticamente en la tercera línea de la Ecuación (4.17), mediante el efecto del parámetro κ_V .
- El Modelo 1 y el Modelo 4 vuelven a ser prácticamente idénticos.

Se recuerda que, como se vio en el Capítulo 3, la matriz de covarianzas se propaga según una transformación lineal mediante la ecuación de cambio de base de una forma cuadrática. Así, si la transformación de las fuerzas en variables de interés para el diseño (esfuerzos, reacciones, tensiones...) es lineal, el conocimiento de la matriz de covarianzas (o equivalentemente los coeficientes de correlación y las varianzas) resulta fundamental estimar correctamente estos valores, por la propagación del error estadístico en la fórmula de transformación (aquí también tiene una importancia fundamental el número de condicionamiento de la matriz de transformación, pero no se entrará en esta discusión). De ahí que para caracterizar la simultaneidad y compatibilidad de las variables de respuesta que interesan para el diseño, el Modelo 2 es totalmente erróneo y el Modelo 3 insatisfactorio.

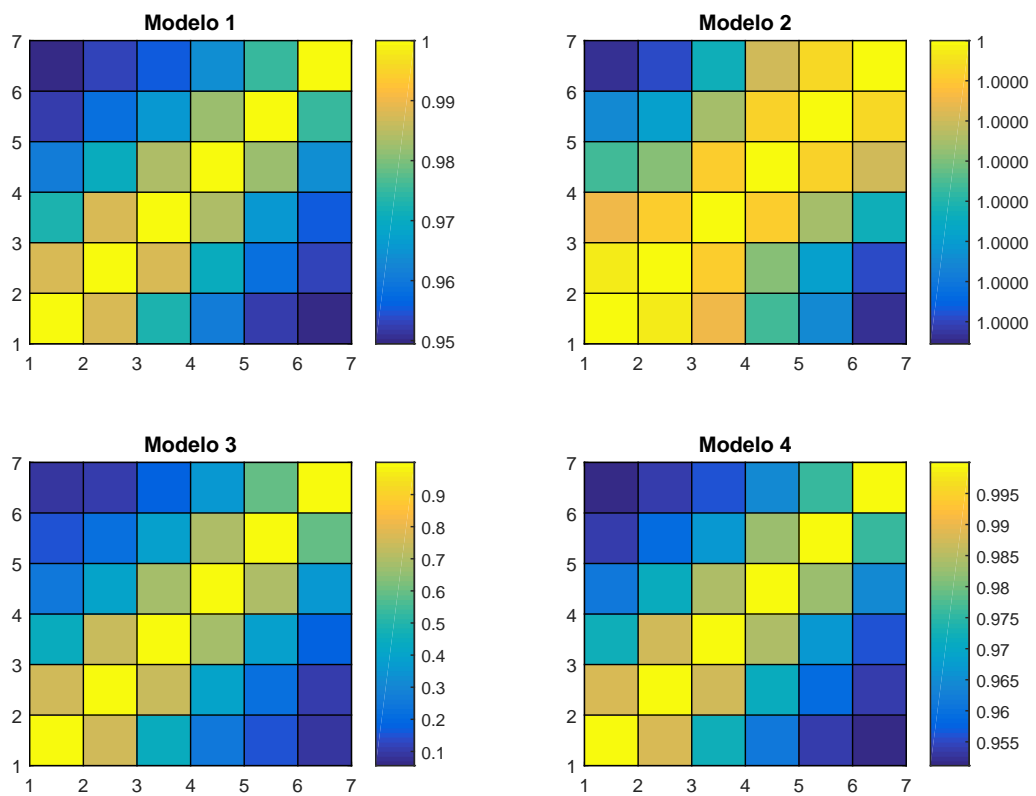


Figura 4.5 Coeficientes de correlación de las series 1 - 7.

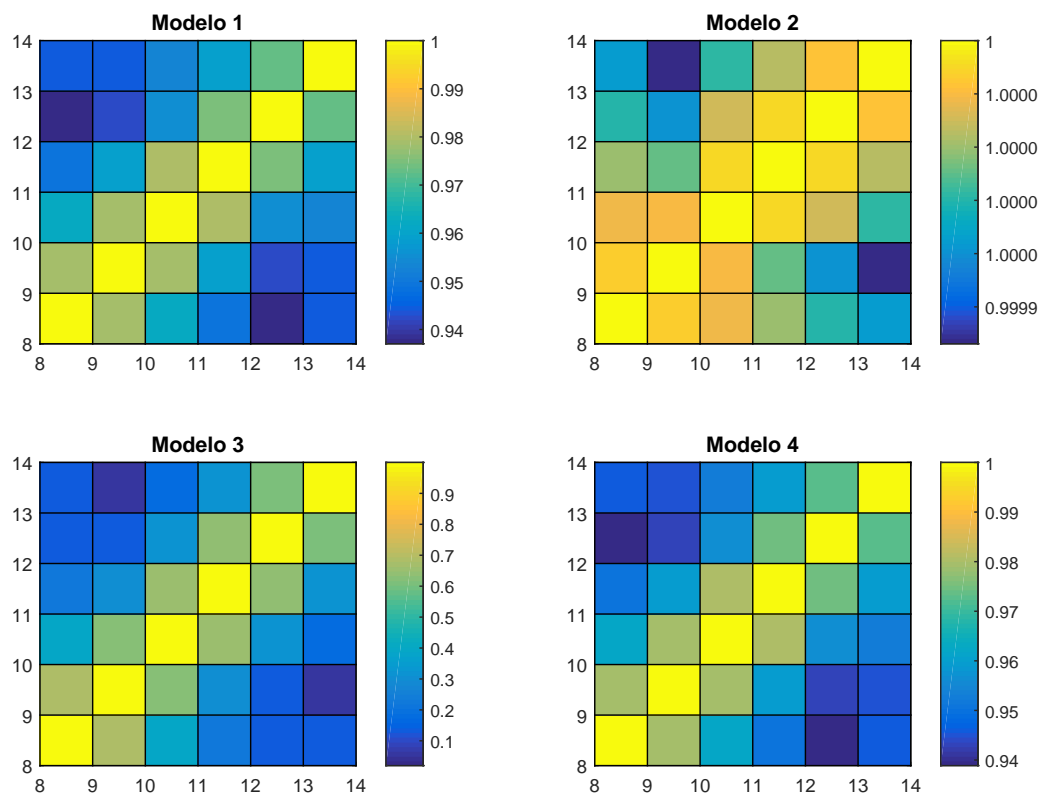


Figura 4.6 Coeficientes de correlación de las series 8 - 14.

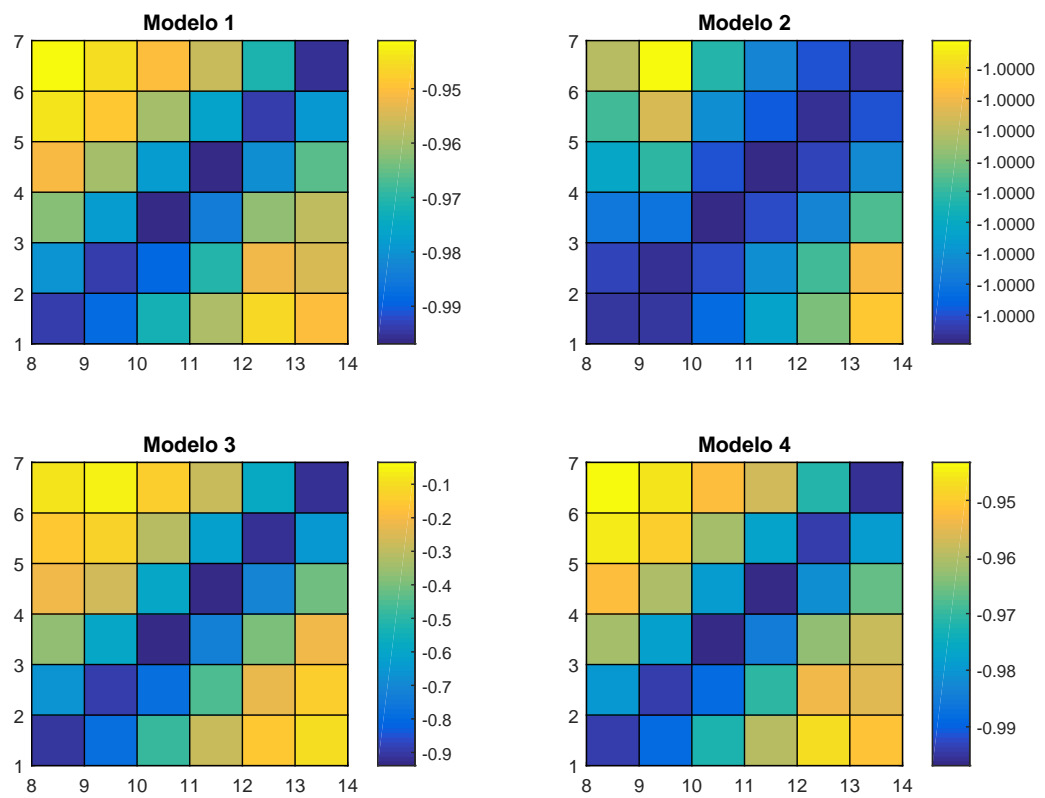


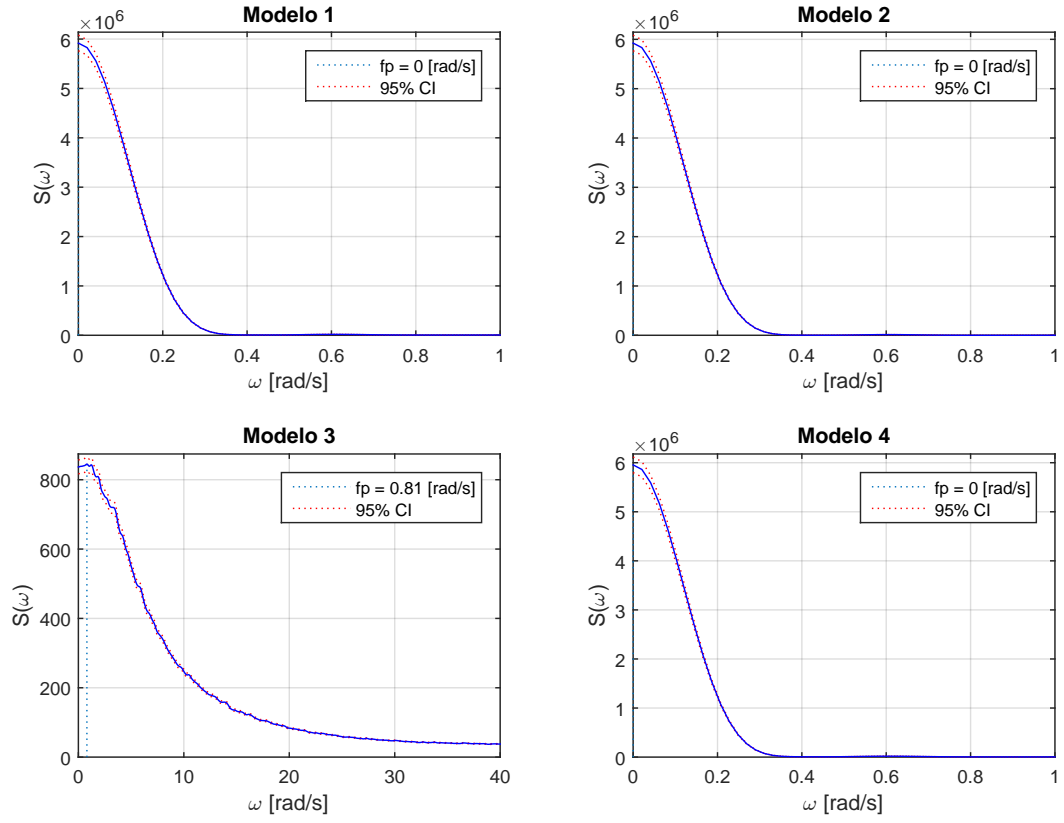
Figura 4.7 Coeficientes de correlación cruzados.

4.4.4 Análisis espectral

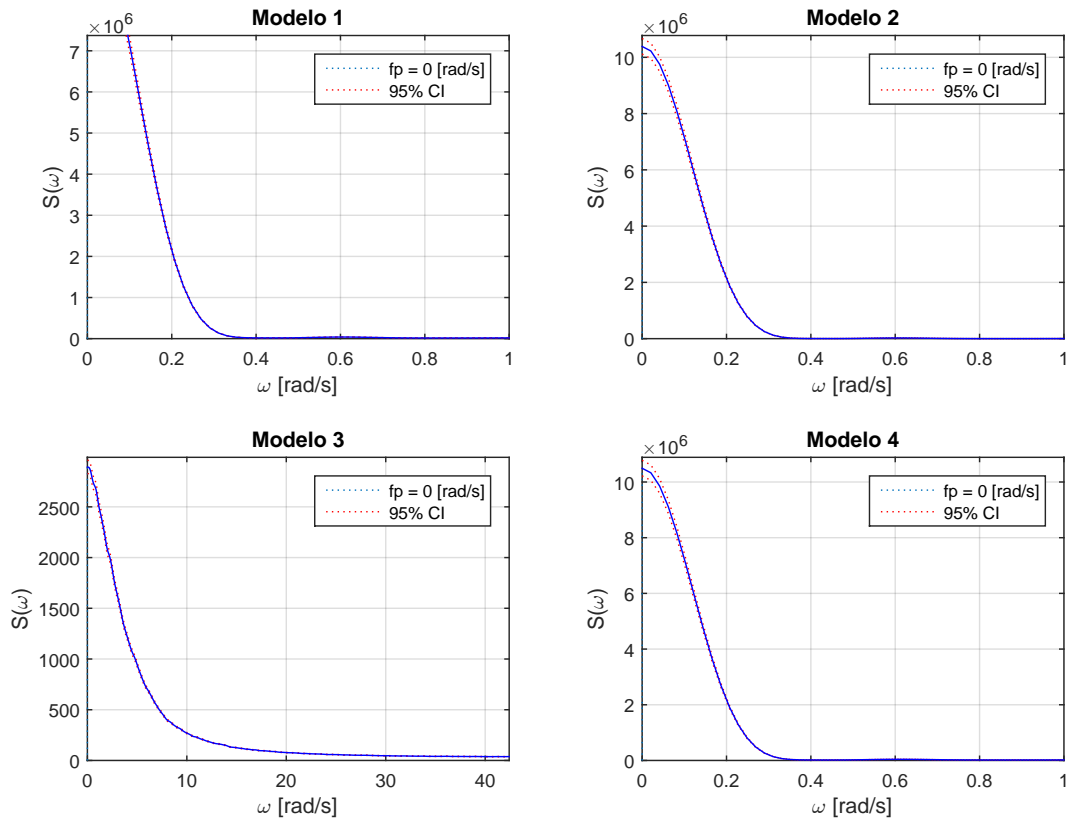
Aunque no se ha considerado en el análisis teórico del modelo, ya que en este documento no se valoran aspectos dinámicos, se realizará a continuación un breve análisis del espectro de las simulaciones. Para ello, tal y como se ha hecho en apartados anteriores, en la Figura 4.8 se presentan las densidades espectrales de las dos series tomadas como ilustrativas (serie 1 y serie 14) utilizando los 4 modelos presentados. En la Figura 4.9, se muestra el detalle de las densidades espectrales para los modelos 1, 2 y 3 de la serie 14, que es válido en general.

En consonancia con los resultados anteriores, se observa:

- En el Modelo 1, el Modelo 2 y el Modelo 4, las oscilaciones de escala $\Delta T = 10 \text{ min}$ tienen mucho más contenido energético que las oscilaciones de alta frecuencia debidas a la turbulencia, por lo que el contenido frecuencial de las oscilaciones de escala temporal de $\Delta T = 1 \text{ s}$ resulta prácticamente inapreciable.
- En el Modelo 3, puesto que no se considera la incertidumbre de la velocidad del viento (el fenómeno de escala temporal larga), el único contenido frecuencial que se observa es el de las propias fluctuaciones turbulentas, de un orden de magnitud cercano a 10^3 veces menor en contenido energético.
- La Figura 4.9 muestra como en los modelos 1, 2 y 4, donde pueden apreciarse las diferencias entre los modelos: el Modelo 2, al considerar únicamente la incertidumbre en la velocidad del viento, no tiene apenas contenido frecuencial para frecuencias mayores a $\omega = 0.4 \text{ rad/s}$ (más allá de las fluctuaciones debidas al propio modelo autorregresivo). Sin embargo, el Modelo 1 y el Modelo 4 sí que reflejan el contenido frecuencial debido a la turbulencia.
- El Modelo 4, al tratar de forma adecuada el acoplamiento entre la escala turbulenta y la escala de velocidad del viento, muestra una tendencia en el espectro más regular, que corresponde, efectivamente, a la superposición de dos modelos autorregresivos, cada uno con una escala propia.



(a) Serie 1.



(b) Serie 14.

Figura 4.8 Funciones de densidad espectral de las series 1 y 14 utilizando los cuatro modelos.

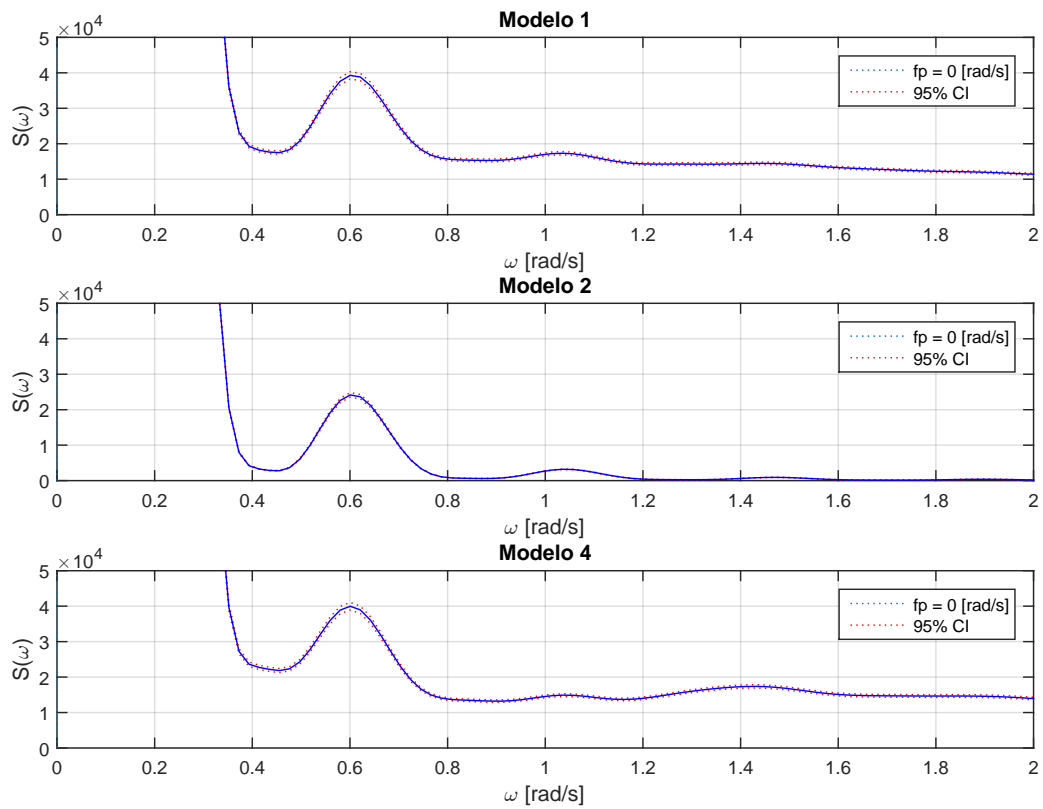


Figura 4.9 Detalle de la densidad espectral para los modelos 1, 2 y 4.

4.4.5 Valoraciones

Para acabar este capítulo, se presenta una comparativa de los modelos presentados. Hasta ahora se han discutido las diferencias, poniendo el acento sobre la justificación de las mismas. Ahora se pretende, siguiendo un espíritu más práctico, valorar la utilidad exactitud de los mismos. Para ello se toma como referencia el Modelo 1, que se considera el más adecuado, aunque es el más costoso computacionalmente y el más difícil de implementar: lo ideal sería poseer varias realizaciones obtenidas mediante CFD o tunel de viento para las series C_i , pero en caso de que esto no fuese posible, la hipótesis de la estacionariedad y la ergodicidad, tal y como se ha usado, permite definir un modelo probabilístico y poder hacer en un tiempo razonable tantas simulaciones como sean precisas. El Modelo 2 no utiliza un modelo probabilístico para los coeficientes de fuerzas, por lo que podrían determinarse de forma sencilla realizando cálculos CFD mucho menos costosos (régimen estacionario) o haciendo experimentos mucho más baratos. El Modelo 3 debería usarse cuando se dispone de los coeficientes de fuerzas que dependen únicamente de la geometría del sistema utilizado, pero no de una serie de datos de velocidades de viento que ajustar. Como se ha visto que la variabilidad de V es fundamental, este modelo no tiene mucho sentido, a no ser que se utilice un valor característico de la velocidad del viento v^* que haya sido calibrado anteriormente. Finalmente, el Modelo 4 es una simplificación del Modelo 1 que sólo requiere de una simulación mediante CFD, aunque no supone ningún modelo paramétrico para la distribución de probabilidad. Este modelo podría utilizarse en el caso de que no se encuentre un modelo probabilístico que ajuste correctamente las series temporales obtenidas, cosa que no es el caso del presente documento.

Se realizará el análisis en base a los momentos estadísticos básicos y los coeficientes de correlación lineal.

Estadísticos básicos

La Figura 4.10 es análoga a la Figura 4.2, con la diferencia que para esta última se ha adimensionalizado utilizando los valores obtenidos en los estadísticos para el Modelo 1.

Como puede observarse, para la tendencia central, los errores del Modelo 2 y el Modelo 4 son despreciables y son únicamente debidos al muestreo estadístico. Sin embargo, el Modelo 3 subestima la media en torno a un 30 % al no tener en cuenta la variabilidad de V . La variabilidad de V explica por lo tanto algo más de un 30 % de la media de F_i . La subestimación de la variabilidad de F_i es mucho más dramática: la variabilidad estimada por dicho modelo es en torno al 10 % de la variabilidad real (en términos cuadráticos). El Modelo 2 también la subestima, pero en mucha menor medida, ya que el error no considerar la variabilidad de C_i es menor al 5 % (e incluso mucho menor si se considera el intervalo intercuartil). El Modelo 3 fracasa absolutamente al subestimar el coeficiente de asimetría en menos de un 0 % de su valor real, mientras que el Modelo 2 la subestima en un 90 % aproximadamente. Aunque el Modelo 3 mejora en el cálculo del coeficiente de curtosis, es una mejora residual, ya que sigue estimando su valor en torno al 35 % de su valor real, pero aquí es donde el Modelo 2 comienza a reflejar sus carencias, al subestimar el coeficiente de curtosis en torno a un 80 % de su valor real. Este fenómeno se acentúa en la estimación de los máximos, donde el valor estimado está un 40 % por debajo de su valor real. Eliminar la variabilidad del coeficiente de fuerzas de un periodo de 10 minutos al siguiente introduce ciertas fluctuaciones alrededor del valor real en la estimación del máximo, que no superan el 10 % tanto por encima como por debajo del valor real.

En definitiva, el Modelo 4, a pesar de ser computacionalmente menos costoso o más fácil de implementar, tiene unas prestaciones excelentes y puede, para el los modelos probabilísticos presentados en este documento, sustituir al Modelo 1 si la ocasión lo requiere. En el otro extremo está el Modelo 3 que no es capaz de caracterizar correctamente ni siquiera el régimen central.

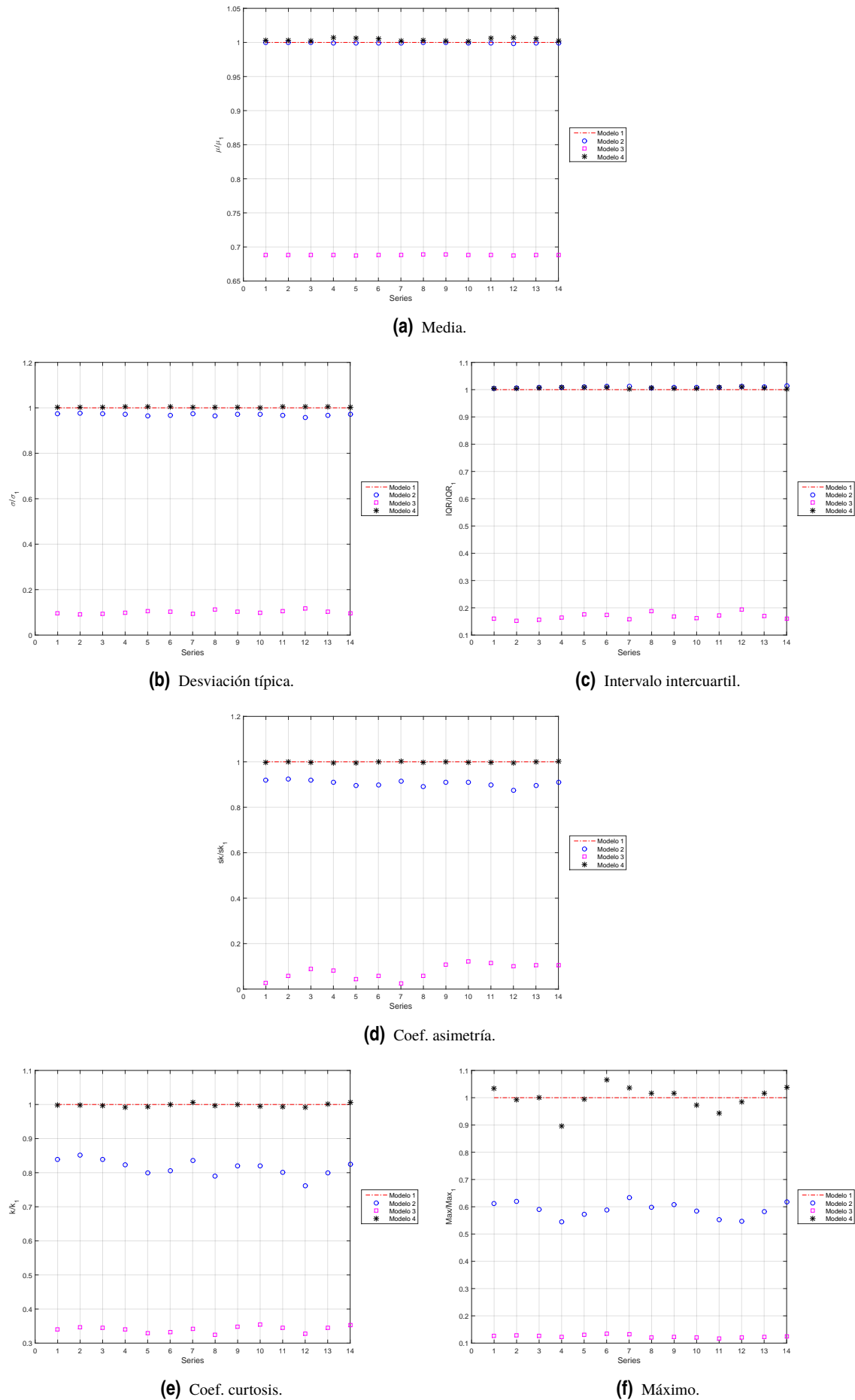


Figura 4.10 Comparación del valor relativo de algunos estadísticos para los 4 modelos propuestos.

4.4.6 Análisis multivariado

La Figura 4.11 muestra el cociente entre los coeficientes de correlación obtenidos en los diferentes Modelos y los obtenidos en el Modelo 1. En ese es complementaria a la Figura 4.5, la Figura 4.6 y la Figura 4.7 pero en valores relativos.

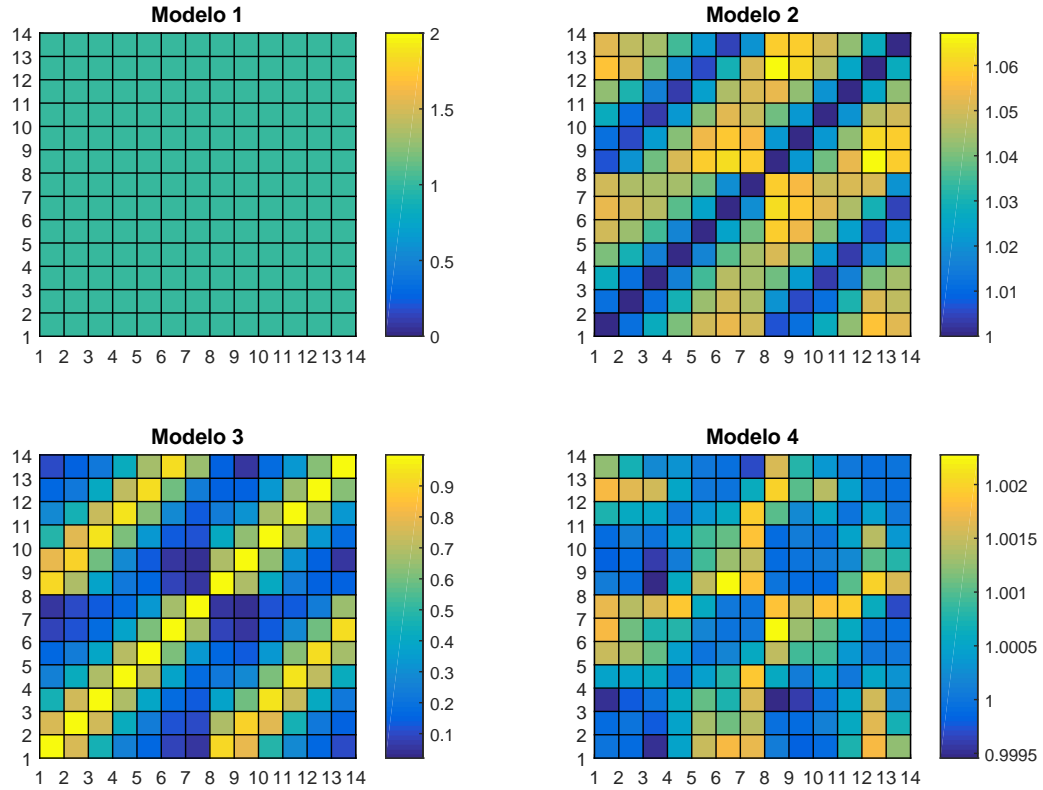


Figura 4.11 Coeficientes de correlación de las series relativos a los obtenidos en el Modelo 1.

En este caso, se observa que el Modelo 2, a pesar de ser esencialmente univariable, no subestima las correlaciones más de un 7%, por lo que, para el caso del presente estudio, suponer el modelo de series totalmente correlacionadas no es dramático. Esto no obstante podría cambiar para otras geometrías. En cualquier caso, se ha de tener siempre presente que estas correlaciones sufrirán una ulterior propagación, para llegar a las variables de interés ingenieril. El Modelo 3, aunque respeta el carácter multivariado del proceso, arroja errores que pueden llegar al 100%. El Modelo 4 resulta especialmente preciso, puesto que no se obtienen errores mayores al 0.2%.

4.5 Conclusión

Se ha visto en este capítulo como influye la incertidumbre de las variables V y C_i en el estudio del proceso aleatorio multivariado F_i , $i = 1, \dots, N$. En primer lugar se ha visto que mediante cálculos sencillos puede relacionarse completamente la estadística de segundo orden de los procesos F_i con la estadística de segundo orden de los procesos C_i y la de cuarto orden de la variable V . Esto sería suficiente para estudios que supusieran, por ejemplo, la normalidad de las variables F_i .

Además, se han puesto de manifiesto las consecuencias que tendría no considerar la incertidumbre de una de las variables que intervienen en el cálculo. Esto, lejos de ser una mera entelequia, es **la realidad del dimensionamiento de sistemas mecánicos**: despreciar la incertidumbre de algunas variables no sólo reduce la varianza de las variables de interés real, sino que tiene efectos importantes sobre su media, su simetría, la frecuencia de valores extremos...

El análisis de un sistema mecánico sujeto a incertidumbre requiere por lo tanto que el ingeniero esté alerta para contemplar estos fenómenos. Esto es lo que se ha hecho en este documento, en el que se han utilizado potentes herramientas para caracterizar adecuadamente la variable a la que el sistema es más sensible, esto es, la velocidad del viento. Esto ha sido, en esencia, lo que se ha buscado en esta Parte I.

Con una buena caracterización de las variables ambientales, el ingeniero está en disposición de analizar el sistema como un todo desde un marco probabilístico. Para ello, no obstante, es necesario definir el comportamiento del sistema sobre todo con respecto a dos aspectos fundamentales: cómo reacciona el sistema a las variables ambientales y como evoluciona a lo largo del tiempo en función de ellas y qué sucesos o eventos condicionan su rendimiento o provocan el fallo mecánico. A esto se dedicará la Parte II de este documento.

En la Parte III de este documento, ya que se dispone de las herramientas y los ajustes necesarios, se usará el Modelo 4, esto es, el Modelo C - V presentado en los capítulos anteriores.

Parte II.

Análisis estructural

5 Cálculo estructural y determinación de solicitaciones

Engineers should press forward with development to meet the diversified needs of people.

HAROLD CHESTNUT, 1917 - 2001

En este capítulo se presentarán todos los aspectos que atañen directamente a la estructura en cuestión que se está analizando. Aquí, no se hará hincapié en las acciones, las variables ambientales, sino que éstas se considerarán como un dato del problema. Por el contrario, lo que se hará en los siguientes apartados es definir y caracterizar la respuesta estructural ante las mencionadas acciones, y proponer un método de cálculo de la respuesta que se adapte al marco de trabajo, y que además sirva para evaluar lo que realmente interesa desde el punto de vista ingenieril: el rendimiento del sistema.

En primer lugar se establecerá una metodología para el análisis de la respuesta estructural que está basada en los métodos clásicos de cálculo estructural: el **Método de la Rigidez** [19], que no es otra cosa que la formulación para piezas prismáticas del **Método de los Elementos Finitos** [96]. La novedad en el análisis radica en que se abordará la respuesta estructural desde una perspectiva evolutiva, de cara a poder evaluar el rendimiento del sistema en un marco temporal. Para ello se establecerán las hipótesis oportunas de cara a un análisis de tipo *cuasi-estático* en el que además, la matriz de rigidez del sistema se considerará dependiente del instante de tiempo considerado.

Posteriormente, una vez definido el marco y el esquema de cálculo, se definirán las solicitaciones estructurales que marcan de forma decisiva el rendimiento del sistema y que por lo tanto estarán relacionadas directamente con los KPIs que se definirán en capítulos posteriores que permitan cuantificar explícitamente el desempeño de la estructura.

Este análisis en dos etapas es crucial en el estudio, puesto que es el que permite pasar de las variables ambientales, perfectamente caracterizadas en la Parte I de este documento, a los indicadores de rendimiento, que se estudiarán en la Parte III, mediante procesos de cálculo habituales en la Ingeniería Mecánica.

5.1 Cálculo estructural

En gran parte de los problemas de Ingeniería Mecánica o Cálculo Estructural, el ingeniero tiene que lidiar con sistemas de ecuaciones diferenciales que, luego de una discretización, en su forma más general, tienen el aspecto siguiente

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(\mathbf{u},t)\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\mathbf{u},t)\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u},t) \quad (5.1)$$

Esta ecuación, de capital importancia en la mecánica estructural y la ingeniería mecánica, merece que se haga un pequeño inciso para aclarar cada uno de sus términos:

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$: Es el vector de incógnitas del problema, usualmente tiene una interpretación directa en términos de los **desplazamientos** de la estructura. No obstante, en función del modelo utilizado y el marco de estudio, las componentes de este vector no son necesariamente los desplazamientos lineales de algunos nodos, sino que pueden estar asociados a otros grados de libertad considerados, en el caso de la Teoría de Estructuras o la Resistencia de Materiales¹, como es el caso por ejemplo de los giros en la teoría de vigas de *Euler - Bernouilli* o *Timoshenko* [3] o la teoría de láminas de *Kirchhoff - Love*, *Mindlin* o *Reissner - Stein* [71]. Para cálculos dinámicos, el vector de desplazamientos depende explícitamente del tiempo y mediante $\ddot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{u}}$ se denota respectivamente a su derivada segunda y primera, respectivamente².
- $\mathbf{M}(t)$: Se conoce como **Matriz de Masa** del sistema y físicamente tiene un significado inercial. Depende de las características físicas, geométricas y topológicas del sistema, así como, para sistemas evolutivos, del instante considerado.
- $\mathbf{C}(\mathbf{u}, t)$: Se conoce como **Matriz de Amortiguamiento** del sistema y físicamente tiene un significado de fricción interna. En algunas ocasiones, esta matriz caracteriza un fenómeno físico de forma precisa que se conoce y se puede modelizar matemáticamente, mientras que en otros casos su fundamento es esencialmente empírico. Depende en general, además de las características físicas, geométricas y topológicas del sistema y del instante considerado, del estado deformacional, es decir, del vector de desplazamientos.
- $\mathbf{K}(\mathbf{u}, t)$: Se conoce como **Matriz de Rigidez** del sistema y físicamente representa la respuesta estática del sistema a las cargas, ya que relaciona el vector de fuerzas con el vector de desplazamientos. Caracteriza tanto el modelo físico subyacente (Relación tensión - deformación, ecuaciones constitutivas...) como la geometría global del sistema y por lo tanto tiene el mismo tipo de dependencias que la matriz de amortiguamiento.
- $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$: Es el **Vector de solicitaciones**, que para el modelo considerado, representa los agentes externos que actúan sobre el sistema. En el contexto de este documento entra dentro del grupo de variables ambientales. En ocasiones estas solicitaciones representan directamente fuerzas sobre el sistema, pero al igual que en el caso de los desplazamientos, su interpretación puede ser más compleja (momentos...). En algunos casos (fuerzas seguidoras), no sólo dependen del instante considerado, sino del estado deformacional del sistema.

Podría hacerse a continuación un análisis del carácter general de la Ecuación (5.1), pero ello alargaría considerablemente esta presentación y no es uno de los objetivos del presente documento. Se precisa no obstante que esta ecuación puede ser la representación directa de un sistema mecánico finito (es decir, un sistema dinámico con n grados de libertad) o el resultado de la discretización de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que caracteriza un sistema mecánico continuo, del ámbito de la mecánica de medios continuos (es decir, un sistema dinámico con infinitos grados de libertad, que se ha discretizado mediante alguna de las técnicas usuales, como puede ser el Método de Diferencias Finitas [66], el Método de los Elementos Finitos [96], el Método de los Elementos de Contorno [16] o el Método de Volúmenes Finitos [91], por citar las más habituales). En cualquiera de los casos, la Ecuación (5.1) tiene siempre como origen último la Segunda Ley de Newton, o la Ley de conservación de la Cantidad de Movimiento, a la que se han podido añadir otras hipótesis de índole físico o geométrico.

Antes de pasar a tratar las hipótesis que se utilizarán para el modelo que se presenta en este estudio, es importante señalar algunos aspectos fundamentales sobre la Ecuación (5.1).

- Se trata de un sistema de **ecuaciones diferenciales ordinarias**. Su resolución puede hacerse en el dominio de la frecuencia o del tiempo. En el segundo caso, se requiere de condiciones iniciales.
- En general, se trata de un sistema **no lineal**. Sólo en algunos casos muy específicos el sistema es lineal y puede resolverse mediante métodos no iterativos.

¹ Siguiendo la línea marcada en [20], aunque clásicamente se ha denominado siempre Resistencia de Materiales a esta disciplina, una apelación más adecuada sería la de Teoría de Tipologías Estructurales

² Es importante señalar que estas derivadas sólo pueden interpretarse como aceleraciones y velocidades nodales en casos muy concretos, en los que se esté usando un sistema de coordenadas cartesianas y el vector de desplazamientos represente verdaderamente los desplazamientos lineales de dichos nodos

En el caso del presente documento, el sistema estudiado es una estructura de barras articuladas bidimensional, en concreto, la que se ilustra en la Figura 5.1. A continuación se presentarán las hipótesis del modelo mecánico empleado y se llegará a una expresión más cómoda y sencilla de la Ecuación (5.1), en la que se describirán explícitamente cada uno de los términos.

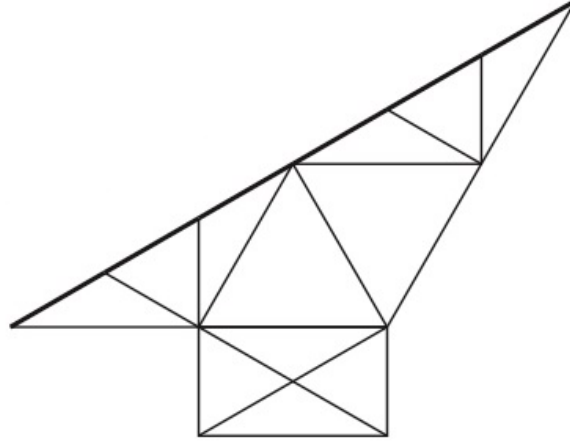


Figura 5.1 Modelo de estructura de barras articuladas para el sistema mecánico considerado.

5.1.1 Hipótesis básicas

Las hipótesis fundamentales que se hacen para abordar el problema considerado son las siguientes.

1. **Se desprecian efectos inerciales:** Se considera que los efectos inerciales y de fricción son despreciables, a efectos del comportamiento estructural. Matemáticamente esto significa considerar $\mathbf{M}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{0}$. Se dice que el sistema es *cuasi-estático*.
2. **El sistema mecánico es una estructura de barras articuladas bidimensional:** Esta hipótesis describe la estructura del vector solución \mathbf{u} , de la Matriz de Rigidez $\mathbf{K}(\mathbf{u}, t)$ y del vector de solicitaciones $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$. Para la estructura considerada, se tendrá, en un sistema de coordenadas cartesianas globales fijado, $\mathbf{u}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2N}$ y $\mathbf{K} \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$, las matrices de $2N \times 2N$ con coeficientes en \mathbb{R} . Para cada uno de los N nodos de la estructura articulada, habrá un grado de libertad correspondiente al desplazamiento lineal horizontal y uno correspondiente al desplazamiento lineal vertical.
3. **Pequeños desplazamientos:** Las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse directamente en la configuración indeformada o lo que es lo mismo $\mathbf{K}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{K}(t)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}(t)$, es decir, el comportamiento del sistema no depende del vector de desplazamientos.
4. **Pequeñas deformaciones:** La descripción de las deformaciones de los materiales puede realizarse mediante el *tensor de deformaciones de Cauchy* [20]. Para el caso de barras articuladas, basta usar la deformación $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$.
5. **Elementos estructurales elásticos lineales:** Cada uno de los elementos estructurales tiene un comportamiento elástico lineal. La ecuación constitutiva del mismo es lineal desde el punto de vista matemático, es decir, existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. Esta hipótesis, unida a las dos anteriores, explicita todos y cada uno de los términos de la matriz \mathbf{K} , que son los correspondientes a la teoría clásica de estructuras articuladas y pueden consultarse en cualquier libro de Cálculo de Estructuras [19]. Cada una de las barras queda caracterizada por exclusivamente dos parámetros, el área A y el módulo de elasticidad longitudinal E , que relacionan las fuerzas y desplazamientos nodales. La matriz de rigidez final se obtiene acoplando las matrices elementales de cada barra en los nodos de forma apropiada, conteniendo por lo tanto esta matriz global la información topológica de la estructura.

Con todo lo expuesto, la Ecuación (5.1), para el caso de la estructura soporte de paneles fotovoltaicos a la que se refiere este documento, se simplifica enormemente, quedando, en su forma más simple:

$$\mathbf{K}(t)\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (5.2)$$

Donde, por supuesto $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. A propósito de la Ecuación (5.2), a diferencia de la Ecuación (5.1) cabe señalar que:

- Se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas parametrizado por el tiempo.
- Fijado el instante de tiempo considerado t , el sistema es lineal.

No obstante, hay que resaltar un hecho fundamental en la Ecuación (5.2): la matriz de rigidez depende explícitamente del tiempo. Esto no significa que el tiempo aparece explícitamente como parámetro en los términos de la matriz \mathbf{K} , sino que esta puede cambiar a lo largo de la historia del sistema, como consecuencia del agotamiento de algunas componentes del sistema, que perderían su capacidad resistente, modificando por lo tanto la topología de la estructura (desde el punto de vista físico). Se dice que la estructura es evolutiva o dependiente de su historia de cargas.

5.1.2 Modificaciones de la matriz de rigidez

Es necesario establecer un método que recoja estas incidencias y por lo tanto modifique la matriz de rigidez oportunamente en el instante de tiempo considerado. Como esta dependencia no es explícita, no queda otra que definir un esquema que modifique, en cada instante, de acuerdo con criterios físicos que se definirán más adelante, la matriz de rigidez para instantes inmediatamente posteriores. Si el modelo de tiempos es discreto, en cada instante t_i , habrá que transformar la matriz de rigidez $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}(t_i)$ en \mathbf{K}_i^* que es la que se aplicará en el instante t_{i+1} , $\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{K}_i^*$.

Falta por concretar con detalle el proceso de modificación de la matriz de rigidez. La idea clave es definir un conjunto de **solicitaciones estructurales internas** que definan como está de exigida la estructura en relación con unas ecuaciones de verificación, o modos de fallo estructurales. Dichas solicitaciones internas, dependerán del estado deformacional \mathbf{u} por lo tanto pueden ser vistas como indicadores de rendimiento, KPIs. Para fijar ideas considérense m solicitaciones internas $\{S_i(\mathbf{u})\}_{i=1,\dots,m}$. En la última sección de este capítulo (Sección 5.2) se explicitará qué solicitaciones internas se considerarán y como se relacionarán con el estado deformacional de la estructura \mathbf{u} . Obsérvese que las solicitaciones internas son función del instante considerado, al serlo \mathbf{u} . Cada una de estas solicitaciones internas puede provocar el colapso de parte o la totalidad de la estructura, para ello, habrá que definir unas **ecuaciones de verificación** que definan ciertos modos de fallo de la estructura asociados al agotamiento de las capacidades resistentes de los elementos. En términos de las solicitaciones, estas ecuaciones de verificación se pueden expresar mediante n ecuaciones de verificación que correspondan con posibles modos de fallo (agotamiento elástico, plastificación excesiva, pandeo, abolladura local, rotura dúctil o frágil...), tantos como se quieran evaluar $f_k(S_1, \dots, S_m) \leq C_k$, $k = 1, \dots, n$, donde C_k son constantes, que, sin pérdida de generalidad, se pueden considerar 1 o 0 son más que definir adecuadamente las funciones f_k , aunque se dejarán las ecuaciones con este formato simplemente por dar una idea intuitiva del significado de las mismas, en relación con la resistencia de materiales, donde siempre hay una solicitación (término izquierdo de la ecuación) y una capacidad resistente (término derecho de la ecuación). En el Capítulo 6 se tratarán las ecuaciones de verificación consideradas.

En cualquier caso, mediante este procedimiento se ha definido una forma de detectar cuando un elemento falla localmente. Aquí no acaba el trabajo, puesto que el fallo de un elemento puede tener o no tener un impacto no local en la estructura vista globalmente. Mecánicamente, pueden aparecer mecanismos estructurales que provoquen el colapso de un conjunto de elementos estructurales, aunque éstos estén intactos desde el punto de vista estructural. Por poner un ejemplo, el agotamiento de un pilar maestro en una estructura puede significar el colapso de la totalidad de la misma, mientras que el colapso de un punto de apoyo en una estructura hiperestática puede que tenga influencia en el comportamiento cinemático de la estructura, aunque, evidentemente, provocará una redistribución de los esfuerzos que a su vez podría desencadenar otros colapsos locales.

Es menester por lo tanto establecer una estrategia para, en el caso de la estructura de análisis, detectar los eventuales mecanismos que se generen como consecuencia de un colapso local de un elemento. El

procedimiento que se describe a continuación es de carácter general, aunque se aplicará a la estructura articulada considerada en este documento.

Supóngase la Ecuación (5.2) particularizada para un instante de tiempo considerado, t . Si se genera un mecanismo, entonces los desplazamientos asociados a ese mecanismo serán los correspondientes a los grados de libertad que intervienen en vectores del núcleo de la matriz de rigidez. En efecto, sea $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{\mathbf{u}} \in \ker \mathbf{K}$, y considérese el estado deformacional \mathbf{u} . Entonces,

$$\mathbf{K}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (5.3)$$

Así, el estado deformacional $\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}$ es también compatible con el vector de cargas externas \mathbf{F} por lo tanto el vector $\bar{\mathbf{u}}$ determina los grados de libertad que intervienen en el mecanismo cinemático. Una vez identificados los grados de libertad globales que intervienen en el mecanismo, hay que identificar qué elementos intervienen en esos grados de libertad y eliminarlos desde el punto de vista resistente, ya que sus movimientos como sólido rígido evitan su función como elementos estructurales.

En definitiva, el algoritmo que se sigue es, para cada instante de tiempo t_i , desde el primer instante, en el que se considera la matriz de rigidez original y utilizando la notación $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}(t_i)$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i)$.

1. Cálculo del vector de solicitaciones externas \mathbf{F}_i .
2. Resolución del sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{K}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i$.
3. Cálculo de las solicitaciones internas $S_i(\mathbf{u})$, $i = 1, \dots, m$ (Sección 5.2).
4. Comprobación de colapso estructural local $f_k(S_1, \dots, S_m) \leq C_k$, $k = 1, \dots, n$. (Capítulo 6). Eliminación de los elementos que colapsan localmente. Si ningún elemento colapsa, ir al Paso 7.
5. Comprobación de colapso estructural global.
 - a) Cálculo del espacio $N_i = \ker(\mathbf{K}_i)$ (en realidad, una base del mismo).
 - b) Búsqueda de los nodos afectados por los grados de libertad que intervienen en N_i , denotados mediante \mathcal{N}_i .
 - c) Búsqueda de los elementos que parten de los nodos \mathcal{N}_i , denotados mediante \mathcal{E}_i .
 - d) Eliminación de los elementos \mathcal{E}_i .
6. Cálculo de la matriz de rigidez \mathbf{K} con la nueva topología estructural. Volver al Paso 2.
7. Pasar al siguiente estado de tiempo: Incrementar i y hacer $\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{K}_i$

Antes de abordar el cálculo de solicitaciones internas es importante señalar dos cosas al respecto del método propuesto.

- Aunque conceptualmente no reviste mayor dificultad, el Paso 5 es computacionalmente el paso crítico, especialmente si el modelo posee muchos grados de libertad y la matriz de rigidez tiene un ancho de banda grande. En efecto, incluye dos búsquedas topológicas por el grafo de nodos de la estructura. La implementación eficiente de este paso es en sí misma un problema de teoría de grafos que excede el ámbito de este estudio, por lo que se ha usado un algoritmo de *fuerza bruta* para las búsquedas. Este es el paso dominante desde el punto de vista computacional y el que aumenta considerablemente el coste de simulación, puesto que ha de hacerse, al menos una vez, para cada instante de tiempo.
- La solución del problema no puede hallarse paramétricamente para un instante genérico: El cálculo de la solución en desplazamientos en un instante t^* requiere de la solución en desplazamientos del sistema $\forall t \leq t^*$. Ésta es la característica a la que se alude cuando se dice que el sistema **es evolutivo**. En cierto modo, esto asemeja la resolución del problema a uno de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante un integrador numérico.

5.2 Cálculo de solicitaciones

Se ha comentado que para evaluar el colapso de los elementos estructurales es necesario establecer unas solicitaciones mecánicas a nivel interno de los elementos, que sean coherentes con las hipótesis del modelo discutidas en la Sección 5.1.1 en especial las referentes al comportamiento del material. Se han planteado históricamente dos enfoques para evaluar si un elemento estructural está o no exigido mecánicamente.

- **Enfoque basado en las tensiones:** Es el enfoque más clásico y natural, aunque está basado en una variable que no deja de ser una entelequia matemática como es el concepto de tensión. Consiste en definir un estado tensional, habitualmente tensorial en todos los puntos de los elementos.
- **Enfoque basado en deformaciones:** Es un enfoque más moderno, que tiene una interpretación más fenomenológica puesto que las deformaciones en el material corresponden con una variación de su estructura atómica y eventualmente, como se produce durante la plastificación, en el desplazamiento de planos estructurales de la red atómica. En este caso, se define un estado deformacional, también tensorial, en todos los puntos de los elementos.

En cualquier caso, como una de las hipótesis del modelo es que los materiales utilizados son elásticos lineales y además se han supuesto pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, la relación entre los tensores de tensión y de deformación de *Cauchy* es lineal, a saber:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.4)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de *Cauchy*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones de *Cauchy* y \mathbb{C} es un tensor de orden 4 denominado tensor de elasticidad, de acuerdo a como se definen por ejemplo en libros básicos de Elasticidad Lineal [20] o, más en detalle, dentro del ámbito de la mecánica de medios continuos general, en [52].

Como además, se ha establecido como modelo estructural el de vigas articuladas, cada elemento tiene únicamente un grado de libertad tensional y deformacional (los tensores no son más que magnitudes escalares), que es, para el caso tensional, el **esfuerzo axial** N y para el caso deformacional, la **deformación longitudinal** ε . Ambas magnitudes están relacionadas por la expresión correspondiente a la Ecuación (5.6) para elementos de tipo barra articulada, que es:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (5.5)$$

Donde, como ya se ha precisado anteriormente, E es el módulo de elasticidad longitudinal y A es el área de la sección.

En este texto, por seguir los procedimientos clásicos de normativas civiles como la Instrucción de Acero Estructural [40], y la Instrucción de Hormigón estructural [38], se seguirá un enfoque de solicitaciones basado en tensiones, o lo que es lo mismo, para el modelo de barras articuladas, basado en esfuerzos internos.

El cálculo de los esfuerzos internos, a partir del estado deformacional de la estructura u , se realiza mediante las matrices de rigidez locales elementales, aplicando las transformaciones de coordenadas adecuadas, como se hace en la aplicación del Método de la Rigidez [19]. En la Figura 5.2 se recuerda el procedimiento para un elemento e . Las variables con tilde indican la representación en ejes locales y las variables sin tilde en ejes globales. Para dicho elemento, y con la notación utilizada, la deformación ε sería constante a lo largo del mismo y valdría $\varepsilon = \frac{\tilde{d}_3^{(e)} - \tilde{d}_1^{(e)}}{L}$, donde L es la longitud sin deformar del elemento y por consiguiente la Ecuación (5.5) se puede expresar

$$\sigma = \frac{EA}{L} (\tilde{d}_3^{(e)} - \tilde{d}_1^{(e)}) \quad (5.6)$$

Así, si la estructura posee n barras articuladas, las solicitaciones internas serán las σ_i $i = 1, \dots, n$ tensiones internas, o, equivalentemente, los N_i , $i = 1, \dots, n$ esfuerzos axiales internos (la relación entre ambos es el área de la sección A_i , $\sigma_i A_i = N_i$).

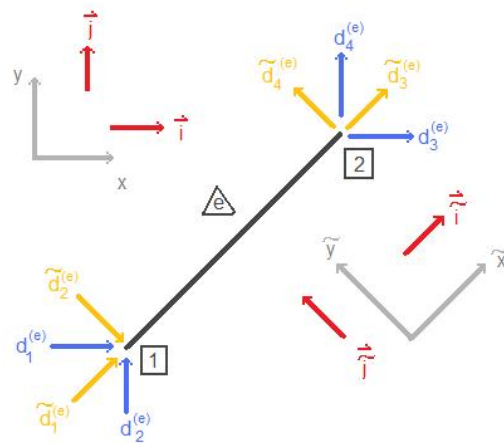


Figura 5.2 Cálculo de las solicitaciones locales.

6 Fallo estructural: ecuaciones de verificación

Make the workmanship surpass the materials.

PUBLIO OVIDIO NASÓN, 43 A.C. - 17 D.C.

En el presente capítulo, se aborda el tema de las ecuaciones de verificación, asociadas con el concepto de fallo estructural. Dicho capítulo está íntimamente ligado con el capítulo anterior (Capítulo 5) y constituyen los dos juntos el bloque del problema que podríamos considerar genuinamente asociado con la ingeniería mecánica.

Es importante señalar que en general las ecuaciones de verificación tienen como fin propio y último identificar el fallo estructural mediante criterios cuantitativos, pero que, además de ello, pueden vincularse a otros aspectos dependiendo del problema considerado. En este documento, por ejemplo, para el problema estructural en cuestión, el fallo estructural es el que determina la modificación de la topología y por lo tanto la rigidez de la estructura.

En primer lugar, se presentará el concepto de **ecuación de verificación** de forma general para cualquier problema ingenieril, se discutirá su alcance y se presentarán algunos casos habituales en ingeniería, particularmente en ingeniería mecánica. Posteriormente, se particularizará para el caso del problema en cuestión, en el que, por simplicidad y carácter ilustrativo, sólo se considerarán dos modos de fallo.

6.1 Forma general de las ecuaciones de verificación

6.1.1 Concepto de ecuación de verificación

Supóngase un sistema \mathcal{S} en el que se han definido unos indicadores de rendimiento, de acuerdo con la terminología introducida en el Capítulo 1. La idea básica es la de definir un subconjunto de entre los indicadores para los cuales se define un umbral para cada uno de ellos. Así, un indicador adquiere realmente una interpretación para la toma de decisiones cuando se compara el nivel de dicho indicador con su umbral. A diferencia de otros indicadores de rendimiento, basados en el servicio, el rendimiento cuantitativo, la productividad etc. Estos indicadores tienen un significado cualitativo (superación del umbral vs. no superación del umbral) más que cuantitativo. El establecimiento de estos umbrales se basa en diferentes criterios.

- Algunos de estos indicadores de rendimiento, los que atañen la integridad del sistema, se denominarán **indicadores de integridad**. El **fallo** se produce cuando los indicadores de integridad superan un determinado umbral, que es un parámetro del sistema, en el sentido en que se definió en el Capítulo 1. A los parámetros de este tipo, se les llama **capacidad** asociada a un determinado indicador de integridad. La capacidad estructural de un determinado indicador se determina principalmente de acuerdo a aspectos fenomenológicos. El elemento físico del sistema considerado colapsa cuando se sobrepasa el umbral considerado. Su capacidad estructural se define como el valor de dicho umbral para un cierto indicador de integridad, que llamaremos **indicador de integridad**. Algunos ejemplos son la rotura de un elemento estructural, la fusión de un metal por altas temperaturas, la desnaturalización de

una proteína o catalizador por desnaturalización al variar el pH del medio ...

- Otros indicadores de rendimiento, comúnmente llamados **indicadores de riesgo**, se establecen por **consenso cultural, social o ambiental**. Se trata de criterios más o menos subjetivos, pero admitidos en la realidad social. Pueden considerarse umbrales que supongan un riesgo de algún tipo para las vidas humanas o animales (como por ejemplo las caídas o proyecciones de elementos o las trayectorias peligrosas), provocar daños al patrimonio cultural (asentamientos en un terreno que generen el hundimiento de un edificio histórico o emblemático) o atenten contra el medio ambiente (emisiones de CO₂, producción de desechos...). En este caso ya no se habla de la capacidad del sistema, sino de los **requisitos** del mismo.
- Finalmente, muchos indicadores de rendimiento están basados en una simple conveniencia. Esta conveniencia puede estar basada en criterios estéticos (flecha de una viga, esbelteces, limitaciones en la geometría...) o de comodidad (vibraciones mecánicas o niveles acústicos molestos, flujos de calor, iluminación...).

Desde un punto de vista clásico, se suele distinguir entre diferentes estados límites, en función de si los indicadores de rendimiento comprometen la seguridad (Estado Límite Último), el servicio (Estado Límite de Servicio) o la operatividad (Estado Límite de Operatividad) (ver por ejemplo [38], [40] y [30]). Esta clasificación es inclusiva y exclusiva para todos los **Modos de Fallo** (ELU y ELS) o **Modos de Parada** (ELO). Para todos los posibles modos de fallo o de parada se define el umbral correspondiente. Aquí se propone un enfoque más integrador, en el que, en base a los criterios presentados, se definen un suceso, de forma cualitativa, cuando los indicadores considerados superan el umbral asociado a ellos.

Es importante señalar que **no necesariamente** los indicadores tienen que estar por debajo de los umbrales especificados (aunque así se hace en el enfoque clásico de las normativas), aunque esto suele imponerse a menudo. En el caso de que se imponga esta condición, se habla de **especificaciones del sistema** y el ingeniero se enfrenta a un problema de dimensionamiento o de optimización con restricciones, tal y como se definió en el Capítulo 1. Aquí, lo que es importante resaltar es que la superación de un determinado umbral determina un **suceso o fallo**, pudiendo (o no) ser este aceptado por el ingeniero en función del marco del problema. Así, impedir el colapso de un elemento estructural puede ser una restricción en el diseño de un puente, pero no en el diseño del elemento fusible de un cuadro de mandos. Es más, en ocasiones la superación del umbral puede ser un desencadenante para otros procesos, como en los sistemas *airbag* de los automóviles.

En definitiva, se establecen una serie de indicadores y_j , $j = 1, \dots, n$, unos umbrales correspondientes c_j y se definen las relaciones

$$y_j \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

A las ecuaciones como las de la Ecuación (6.1) se les denomina **ecuaciones de verificación** y a la región del espacio $\mathcal{U} = \{(y_1, \dots, y_n) | y_j \leq c_j, \forall j = 1, \dots, n\}$ **región de seguridad**. Obsérvese que se trata de una región del espacio n -dimensional acotada por hiperplanos.

Para fijar ideas, en lo que sigue, se restringe el ámbito de estudio a la rama de la ingeniería mecánica y en particular a los sistemas estructurales. Así, a partir de ahora \mathcal{S} será una estructura. En este contexto, los indicadores de rendimiento suelen ser todos indicadores de integridad y vienen definidos en función de las variables que definen el estado de sollicitación del sistema (ver Capítulo 5). Por ello, es habitual que puedan encontrarse n funciones g_j de forma que, dados m variables x_i , $i = 1, \dots, m$ que definan las sollicitaciones de la estructura o el sistema mecánico, pueda definirse, dentro de un marco fenomenológico, $y_j = g_j(x_1, \dots, x_m)$. Así, las ecuaciones de verificación dadas por la Ecuación 6.1) quedan:

$$g_j(x_1, \dots, x_m) \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

Esta nueva expresión de las ecuaciones de verificación, tiene la ventaja de que permiten expresar las ecuaciones de verificación en términos de las variables de sollicitación estructural, determinadas a partir del estado deformacional u y si además se cumple que $m < n$ se reduce el espacio paramétrico. Sin embargo, el inconveniente está en que en términos de las variables x_i , la región de seguridad queda definida mediante $\mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_m) | g_j(x_1, \dots, x_m) \leq c_j, \forall j = 1, \dots, n\}$ y este conjunto puede ser muy irregular, y viene

determinado por las características de las funciones g_j . Redefiniendo si hiciera falta la función g_j mediante $\tilde{g}_j(x_1, \dots, x_m) = g_j(x_1, \dots, x_m) - c_j$ la Ecuación 6.2 queda:

$$\tilde{g}_j(x_1, \dots, x_m) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

6.1.2 Alcance y problemática

Es importante detenerse aquí para resaltar algo fundamental: **las ecuaciones de verificación nada tienen que ver con el modelo de cálculo de las solicitaciones del sistema**. Esto significa (como suele ser habitual) que el método de cálculo puede ser lineal (como es el caso del presente documento, para un instante t fijado) y sin embargo no serlo las funciones g_j . Como consecuencia, a pesar de que los indicadores x_i dependen linealmente de las variables ambientales (en este caso fuerzas), y por ello son aplicables las potentísimas herramientas del álgebra lineal (principio de superposición, homogeneidad, teoremas de existencia y unicidad, inversión de sistemas lineales...), las ecuaciones de verificación no lo son, por lo tanto el problema global deja de ser lineal. Dicho de otro modo: habitualmente, las ecuaciones de verificación se acaban con la linealidad del problema, haciendo que un problema tremendamente sencillo se convierta en inabordable. Esto se ilustrará más adelante con algunos ejemplos concretos.

Aunque conceptualmente las ecuaciones de verificación no presentan dificultad alguna, constituyen en la mayoría de los casos el *cueño de botella* del problema en cuestión: el carácter no lineal de las mismas la mayoría de las veces hace imposible un tratamiento analítico del problema y dificulta enormemente el tratamiento numérico. La mayoría de las ocasiones, en los problemas de dimensionamiento o diseño es necesario recurrir al método de *prueba y error* para todas las ecuaciones de verificación consideradas (pueden ser cientos de miles). El coste computacional, además, escala con cada ciclo de instrucciones. Por ejemplo, en una simulación estructural *cuasi-estática* como la del presente documento, en la que se usan N instantes de tiempo, si cada uno de los B elementos estructurales requiere de la evaluación de n ecuaciones de verificación, el número de evaluaciones necesarias es $N_T = N \times B \times n$. Aunque los pasos que involucran a N y B son lineales, el hecho de que el último paso no lo sea, hace necesaria la evaluación exhaustiva de las N ecuaciones resultantes.

La evaluación de las ecuaciones de verificación puede hacerse bien considerando \mathcal{S} en términos de las variables x_i como subconjunto de \mathbb{R}^m , bien considerando \mathcal{S} en términos de las variables y_j como subconjunto de \mathbb{R}^n . Suele ser habitual considerar el espacio definido por las variables x_i , ya que tienen un significado físico más claro y la dimensión del espacio total es menor. En la Figura 6.1 se muestra un ejemplo de una región de seguridad en un espacio bidimensional (x_1, x_2) . Se han generado (aleatoriamente) puntos (x_1^k, x_2^k) , $k = 1, \dots, N_1$ que corresponderían con eventuales realizaciones físicas, bien porque se trata de una serie temporal donde $x_i^k = x_i(t_k)$, $i = 1, 2$, $k = 1, \dots, N$, bien porque son realizaciones del vector aleatorio (X_1, X_2) (incluso las dos cosas, o lo mismo visto desde dos prismas diferentes como es el caso en los procesos estacionarios y ergódicos). En la primera subfigura se ha simulado el vector aleatorio (X_1, X_2) considerando las dos variables uniformes e independientes, mientras que en la segunda subfigura se ha considerado que $\rho(X_1, X_2) = 0.6$ ¹. Los puntos azules corresponden a puntos en los que $y = g(x_1, x_2) \leq 0$ donde $g(x_1, x_2) = 7x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2 + 1$ (puntos seguros) y los rojos puntos en los que $y > 0$. En este caso se verifica $m = 2$ y $n = 1$.

Obsérvese que si (x_1^k, x_2^k) son realizaciones de un vector aleatorio y s es el número de puntos seguros y N el número de realizaciones, $p = \frac{s}{N}$ es una aproximación de la probabilidad $\Pr[g(X_1, X_2) \leq 0]$ ² ya que

¹ En general, estas variables pueden tener una dependencia no lineal, en cuyo caso habría que conocer, explícitamente o mediante muestreo, la función de densidad conjunta de las variables

² Esto es ni más ni menos que el principio de la familia de Métodos de Montecarlo, que se discutirán en capítulos posteriores

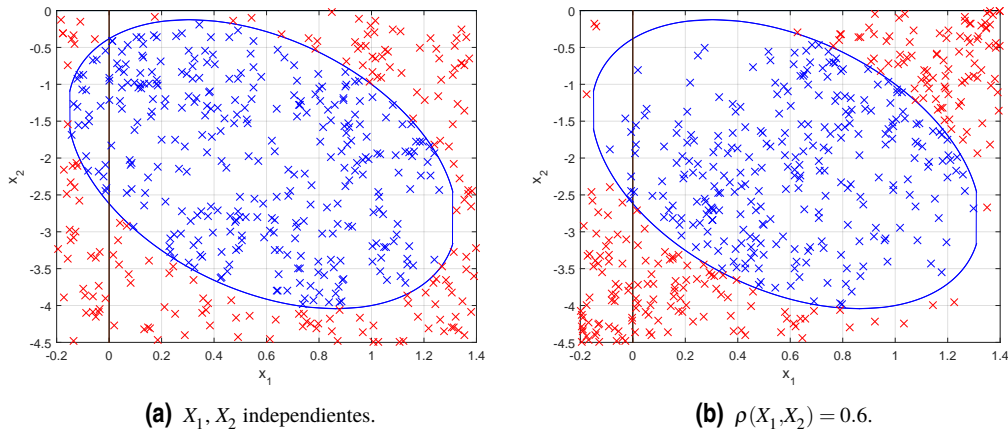


Figura 6.1 Ilustración del concepto de ecuación de verificación. $X_1 \sim \mathcal{U}(-0.2, 1.4)$, $X_2 \sim \mathcal{U}(-4.5, 0)$.

$$\begin{aligned}
 \Pr[Y \leq 0] &= \Pr[g(X_1, X_2) \leq 0] \\
 &= \int \int_{g(X_1, X_2) \leq 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{\{g(X_1, X_2) \leq 0\}} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{s}{N} \quad \text{si } N \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

6.1.3 Ejemplos de ecuaciones de verificación en ingeniería mecánica

Dentro del ámbito de la ingeniería mecánica (mecánica de medios continuos, la elasticidad y la teoría de tipologías estructurales (resistencia de materiales), mecánica de la fractura y la fatiga...) es muy habitual el uso de ecuaciones de verificación para el control de la integridad estructural. Ejemplos de de ecuaciones de verificación, en diferentes marcos científico-técnicos, son:

- **Criterios de plastificación:** En general, en un modelo de medios continuos, se trata de una ecuación del tipo $g(\boldsymbol{\sigma}(X)) \leq 0$ para cada punto $X \in \Omega$ del medio considerado, donde $\boldsymbol{\sigma}(X)$ es el tensor de tensiones de *Cauchy* en el punto X . La función g se denomina **función de plastificación** y a la superficie $g(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ **superficie de plastificación**. La zona de seguridad es por lo tanto el volumen encerrado por la superficie. Entre las funciones de plastificación más habituales para materiales isótropos se encuentran:

- **Criterio de Von Mises:** El más utilizado para metales. Supone entre otras cosas que a la plasticidad sólo contribuyen las componentes desviadoras del tensor. Aquí:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} - \sigma_c$$

donde σ_I , σ_{II} y σ_{III} son las tensiones principales (autovalores del tensor $\boldsymbol{\sigma}$) y σ_c es el límite elástico del material, un parámetro del modelo que depende del material utilizado y se obtiene experimentalmente.

- **Criterio de Tresca:** Menos frecuentemente usado para metales, también basado en que la presión hidrostática no tiene efecto sobre la plastificación. La función de plastificación en este caso es

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - \sigma_c$$

- **Criterio de Drucker–Prager:** Utilizado en mecánica de suelos, mecánica de rocas y en ocasiones para hormigón y polímeros. Incluye el efecto de la presión hidrostática, tratando de generalizar el

criterio de *Von Mises*. La función de plastificación es

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} - B(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) - A$$

En este caso A y B son parámetros del modelo relacionados con los límites elásticos a tensión y compresión uniaxial σ_c y σ_t mediante $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right)$ y $B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sigma_c + \sigma_t} \right)$.

- **Criterio de Mohr-Coulomb:** Como en el caso anterior, incluye el efecto de la presión hidrostática (puede considerarse una generalización del Criterio de *Tresca* que tenga en cuenta la componente hidrostática de la tensión). Utilizado generalmente para materiales frágiles, suelos cohesivos y aglomerados. La función de plastificación en este caso es, considerando un plano paralelo a la dirección de la tensión principal σ_{II} (esto habría que repetirlo para cada dirección principal, de donde se obtendrían tres ecuaciones de verificación),

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \sin \phi + c \cos \phi$$

Los parámetros c y ϕ se conocen como cohesión y ángulo de rozamiento interno del material y están relacionados con los límites elásticos a tensión y compresión uniaxial σ_c y σ_t mediante $\sin \phi = \frac{K-1}{K+1}$ y $c = \frac{\sqrt{K}}{2} \sigma_t$ con $K = \frac{\sigma_c}{\sigma_t}$.

- **Criterio de Cam-Clay:** Es un criterio de plastificación muy utilizado en mecánica de suelos, especialmente en el estudio de arcillas saturadas. La función de plastificación es

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = q^2 - M^2 p' (p'_0 - p')$$

Las "" en las variables indican que hay que tener en cuenta la presión intersticial del agua. $p' = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$, $q = \sigma_{III} - \sigma_I$ y p_0 es la presión de consolidación del suelo (máxima presión a la que ha sido sometido en su historia). El valor del parámetro M puede relacionarse con el parámetro ϕ del modelo de *Mohr-Coulomb* mediante la expresión $M = \frac{6 \sin \phi}{3 \pm \sin \phi}$ (positivo para extensión y negativo para compresión).

- **Mecánica de la fractura:** En el área de la mecánica de la fractura, también se plantean ecuaciones del tipo $S \leq C$ donde S es una sollicitación y C la capacidad del sistema. Existen varios marcos de trabajo, a saber:

- **Mecánica de la Fractura Elástica Lineal:** Se utiliza cuando se está ante pequeños desplazamientos y deformaciones y se supone material elástico lineal. En este contexto la ecuación de verificación suele escribirse, si $A = I, II, III$ representa el modo de la grieta $K_A \leq K_{AC}$ [5], donde $K_A = \sigma Y \sqrt{\pi a}$, con σ tensión remota, Y coeficiente de forma, que depende de la geometría del problema, a longitud de la grieta y el parámetro K_{AC} es la **tenacidad a fractura**, una propiedad del material.

- **Mecánica de la fractura no lineal:** De ámbito más general (aunque incluye el caso anterior), en este caso se utilizan variables energéticas (ratio de energía liberada) y las expresiones son del tipo $G_A \leq G_{AC}$ donde de nuevo G_{AC} es un parámetro del problema y depende del material y G_A se calcula, la mayoría de veces numéricamente, calculando la integral J [5].

- **Mecánica de la fatiga:** En este área de la ingeniería mecánica también se utilizan ecuaciones de verificación del tipo $S \leq C$, pero en este caso la sollicitación S suele estar relacionada con las características espectrales de la señal (número de ciclos y amplitud de los ciclos). Algunos ejemplos (se presentará sólo el caso uniaxial para metales para no entrar mucho en el detalle) son

- **Formación de grietas basada en la curva $S-N$:** Se establece una relación entre tensiones y ciclos hasta rotura del tipo $S = f(N)$ generalmente de tipo potencial ($S = a \cdot 10^{-bN}$ hasta un número N_f suficientemente grande, del orden de $N_f = 10^6$, para el que el valor de S se denomina el **límite de fatiga a vida infinita** y se representa mediante σ_f) donde S está relacionado con las variaciones de tensión y generalmente se toma $S = \sigma_a$, la amplitud del ciclo de tensiones en el caso de que la tensión media sea cero $\sigma_m = 0$. Si esto no fuera así, es habitual y sencillo usar el

*criterio de Goodman*³ que corrige el valor de S haciendo $S = \sigma_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)$ donde σ_u es el límite de rotura (límite último). Esta expresión debe modificarse para considerar los efectos de tamaño, temperatura, acabado superficial... Puede consultarse toda la teoría en detalle en [8].

- **Formación de grietas basada en la curva $\varepsilon - N$:** Se establece una relación entre deformaciones y ciclos hasta la rotura que tenga en cuenta el comportamiento elástico y plástico del material del tipo $\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$. $\Delta\varepsilon/2$ es la amplitud de las deformaciones, N_f es el número de ciclos hasta el fallo y los parámetros σ'_f , b , ε'_f y c son propiedades del material, llamadas **coeficiente de resistencia a fatiga**, **exponente de resistencia a fatiga**, **coeficiente de ductilidad a fatiga** y **exponente de ductilidad a fatiga**, respectivamente. De nuevo esta relación no considera el efecto de la tensión media en cada ciclo, $\sigma_m = 0$. Si ésta no fuese nula, es habitual usar el criterio de *Morrow*⁴ sustituyendo en la expresión anterior σ'_f por $\sigma'_f - \sigma_m$. De nuevo en [8] pueden consultarse todos los detalles.
- **Propagación de grietas por fatiga:** La expresión más conocida es la que se obtiene combinando la mecánica de la fractura elástica lineal con la *Ley de Paris* para el crecimiento de grietas [5] $\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m$ donde A y m son parámetros, dependientes del material y ΔK son las variaciones del factor de intensidad de tensiones $K = \sigma Y \sqrt{\pi a}$. La expresión final es $N \leq N_f$ siendo N el número de ciclos de carga y $N_f = \frac{1}{A\pi^{m/2}(\Delta\sigma)^m} \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{Y^m a^{m/2}}$, donde todos los parámetros han sido ya descritos salvo $a_c = \left(\frac{K_C}{\sigma Y \sqrt{\pi}}\right)^2$ que es la longitud de grieta crítica.
- **Criterios de inestabilidad:** Son todos los criterios que hacen intervenir el efecto de grandes desplazamientos, lo que introduce las no linealidades geométricas. Sin pretender entrar en el detalle ya que la consideración de las no linealidades geométricas presenta una casuística enorme, se enumeran algunos modos de fallo por inestabilidad:
 - **Pandeo de barras:** Incluye el pandeo por esfuerzo axial, pero también el pandeo por flexión, por torsión o el pandeo lateral.
 - **Pandeo o abolladura en láminas:** Las láminas pueden perder (o ganar) rigidez en función del estado de deformación, si se considera la posibilidad de grandes desplazamientos. Esto tiene una importancia fundamental en el dimensionamiento de estructuras mediante el uso de perfiles metálicos, donde parte de la sección puede perder capacidad resistente debido a efectos de abolladura locales (esto es lo que se utiliza en la normativa de acero estructural [40] para la Clasificación de las secciones en Clase I, Clase II, Clase III y Clase IV).

6.2 Modos de fallo estructurales de una estructura de barras articuladas

En la sección anterior se ha presentado el marco general para el estudio del fallo estructural mediante las ecuaciones de verificación y se ha comprobado que el alcance de este enfoque es enorme. De hecho, gran parte de la ingeniería mecánica puede catalogarse como *la ciencia del estudio del fallo mecánico* y para ello todas las herramientas de cálculo están basadas, en mayor o menor medida, en ecuaciones de verificación.

Así, el alcance es enorme. En un sistema estructural sometido a cargas ambientales, pueden determinarse las solicitaciones estructurales internas y a partir de ahí comprobar cualquiera de los posibles modos de fallo. A partir de ahí, es posible evaluar las consecuencias de cada uno de los fallos posibles, aunque esto requiere de un conocimiento profundo del sistema.

En la estructura que va a servir de ilustración para este estudio completo, se han establecido unas ecuaciones de verificación sencillas y directas. Esto no tiene que ser necesariamente así: se podrían plantear tantas ecuaciones de verificación como se deseara, involucrando plasticidad, mecánica de la fatiga y fractura, no linealidades.... Ya se ha comentado que la implementación es sencilla, que el problema suele estar asociado al coste computacional o a la automatización del proceso dentro de un esquema iterativo general.

³ Hay otros como el criterio de *Soderberg*, *Gerber* o *Morrow*

⁴ Una vez más, existen otros modelos como el de *Manson-Halford* o *Smith-Watson-Topper*

Para el caso de la estructura modelo, se van a establecer las ecuaciones de verificación más habituales en estructuras de barras.

6.2.1 Fallo por agotamiento elástico

Se considera que se produce el fallo estructural en uno de los elementos estructurales (barras articuladas) cuando las solicitaciones internas agotan su capacidad elástica. Esto implica considerar que el comportamiento de la barra es perfectamente elástico (esto ya se había asumido) y que el límite último (tensión de rotura) del material coincide con el límite elástico (tensión de fluencia) $\sigma_u = \sigma_y$. Dicho de otro modo, en el momento en que la barra agota su capacidad elástica, agota su capacidad resistente y se produce el fallo estructural. Esta hipótesis es razonable para muchos tipos de barras, en los que el tramo plástico trae consigo no linealidades que provocan el fenómeno de abolladura o pandeo local y por lo tanto el colapso de la sección (secciones de Clase III) [40]. Es importante señalar que esta condición no sólo depende del material (es decir, de su límite elástico σ_y) sino también de la geometría de la sección (esbeltez de los elementos) y del tipo de distribución de tensiones que puede darse en la sección. En definitiva, el fallo se produce cuando la tensión normal interna sobrepasa el **límite elástico**.

Este modo de fallo, corresponde a la clase de fallos dados por los **criterios de plastificación**. Al ser el modelo basado en la teoría de elementos barra articulada lineales (ver Capítulo 5) el criterio de plastificación tiene una expresión directa y sencilla:

$$|\sigma| \leq \sigma_y \quad (6.4)$$

Recuérdese que el cálculo de la solicitación interna, en este caso la tensión normal σ , se detalló en el Capítulo 5, Ecuación (5.6).

6.2.2 Fallo por pandeo de barras

Se considera que se produce el fallo estructural en uno de los elementos estructurales cuando se produce el pandeo local de la barra. Esto es, cuando el esfuerzo axil en la misma sobrepasa la **carga crítica de Euler** (que corresponde con el punto de bifurcación de equilibrio, utilizando teoría no lineal). La carga crítica de Euler se obtiene mediante la expresión $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$ donde E es el módulo de elasticidad longitudinal de la barra, I es el momento de inercia mínimo de la sección transversal de la barra y L_{cr} es la longitud de pandeo, que depende de la estática de los apoyos. Se suele expresar $L_{cr} = \alpha L$, con L la longitud de la barra. En el caso de barras biarticuladas, se tiene $\alpha = 1$. Para una descripción más detallada y matemática sobre el fenómeno de pandeo pueden consultarse los escritos de *Timoshenko* [88] o [86] que trata sobre la teoría de la inestabilidad estructural en general.

Este modo de fallo, corresponde a la clase de fallos dados por los **criterios de inestabilidad**. Conocido el valor de N_{cr} , que sólo depende de las propiedades del material y la geometría de la barra considerada, la verificación del modo de fallo por pandeo se expresa de forma simple:

$$N \leq N_{cr} \quad (6.5)$$

De nuevo se recuerda que el cálculo de la solicitación interna $N = A\sigma$ se detalló en el Capítulo 5, Ecuación (5.6).

Parte III.

Aplicación al análisis de fiabilidad

7 Diseño y análisis económico

Put not your trust in money, but put your money in trust.

OLIVER WENDELL HOLMES, 1809-1894)

En este capítulo se dejan de lado los aspectos puramente mecánicos de la estructura para entrar en aspectos económicos. Como ya se ha comentado, siempre que se diseña un sistema, éste se diseña para que desempeñe una función. En muchos casos, los sistemas mecánicos tienen una función estructural o de soporte. En otras ocasiones, poseen una función motora.

Sin embargo, ocurre en ocasiones que es más útil vincular el rendimiento de un sistema a su producción, su productividad o su eficacia. Este marco engloba los dos anteriores, puesto que el rendimiento puede referirse a la capacidad (medida en tiempo, por ejemplo) de un sistema para mantener su integridad estructural y no derrumbarse, a su capacidad para llevar a cabo las tareas motoras para las que ha sido diseñado de forma adecuada, pero también a otras muchas diversas y flexibles formas de evaluar su funcionamiento.

La palabra **rendimiento** es aquí clave, y puede estar asociada a una infinidad de conceptos. En el caso de sistemas productivos vinculados a procesos de contratos de explotación (plantas de energía, por ejemplo) es útil vincularla al **beneficio de explotación**.

En el marco que se presentó en el Capítulo 1, el beneficio de explotación es el indicador de rendimiento que se desea maximizar. No obstante, en la mayoría de las ocasiones, el sistema está sujeto a unas especificaciones, que pueden ser el producto de cláusulas del contrato o no, pero que **no tienen por qué, en general** coincidir con las ecuaciones de verificación asociadas a fallos estructurales definidas en el Capítulo 6.

En primer lugar, se entrará en los detalles del **problema integral de optimización**, definiendo el tipo de variables de optimización o diseño, la función objetivo y las restricciones. Se indicará además cómo se puede abordar el problema desde el punto de vista probabilístico, cuando algunas de las variables de optimización puedan estar definidas en un contexto que involucre incertidumbre.

Una vez planteado el problema, se distinguirán dos fases en el proceso: la fase de diseño, en la que se resuelve el problema de optimización, y la fase de análisis, en la que se estudia la solución del problema de cara a la toma de decisiones.

Posteriormente, se recalcará la amplitud y la potencia de este enfoque integral, proponiendo varias estrategias que permiten abordar, desde un punto de vista cuantitativo, varias situaciones de conflicto en las que el ingeniero debe decidir. Con esta metodología, se plantea por lo tanto un nuevo paradigma para la toma de decisiones.

7.1 Planteamiento general del problema

Se desea optimizar un sistema mecánico \mathcal{S} . Dicho sistema viene descrito de la forma en la que se describió en el Capítulo 1, es decir, en él intervienen

1. Variables de entrada. Dichas variables a su vez pueden ser
 - a) Variables intrínsecas o parámetros.
 - b) Variables extrínsecas o ambientales.
2. Variables de salida. De nuevo pueden clasificarse en
 - a) Indicadores de rendimiento.
 - b) Otras variables intrascendentes.
3. Una relación funcional, explícita o implícita, que relaciona las variables de entrada con las de salida.

Así, por formalizar, se define un **sistema** como una terna $\mathcal{S} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{F})$ donde

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el conjunto de variables de entrada.
- $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ es el conjunto de variables de salida.
- $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función que define el comportamiento del sistema y se define mediante $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

7.1.1 Formulación general del problema de optimización

El problema de optimización de un sistema, consiste en escoger un subconjunto de variables de entrada como variables de diseño, un subconjunto de variables de salida como variables restringidas y una variable de salida como función objetivo.

Por seguir con el marco formal, un **problema de optimización** es una terna $\mathcal{O} = (\mathcal{S}, U_e, U_r, I)$ donde

- \mathcal{S} es un sistema.
- $J_e \subseteq \{1, \dots, n\}$ es un subconjunto de índices de las variables de entrada. Define las **variables de diseño**.
- $J_r \subseteq \{1, \dots, m\}$ es un subconjunto de índices de las variables de salida. Define las **restricciones**.
- $I \in \{1, \dots, m\}$ es un índice de las variables de salida. Define la **función objetivo**.

Sin pérdida de generalidad, se puede hacer, para $1 \leq k \leq n$, $J_e = \{k, k+1, \dots, n\}$, $I = 1$ y $J_r = \{2, \dots, l+1\}$ (no es más que una reordenación de las variables). En general, se suele escoger J_e el subconjunto de parámetros del sistema, que son sobre los que el ingeniero tiene más control, siendo el resto de variables de entrada las variables ambientales. Dicho de otro modo, las variables de diseño suelen ser los parámetros del problema.

Sea $V = \pi_{J_e}(U)$ la proyección de U sobre las variables en las que interviene J_e (es decir, el espacio que pueden recorrer las variables x_{k+1}, \dots, x_n). Se puede expresar $y_j = F_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, m$ y por comodidad se define $F = F_1$ y $G_{j-1} = F_j$, $j = 2, \dots, l$. La **forma canónica de un problema de optimización**¹ es la siguiente

$$\begin{aligned} & \max_{(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V} F(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sujeto a} \\ & G_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (7.1)$$

¹ Redefiniendo las variables de salida si fuese necesario, es fácil ver que todo problema de optimización puede expresarse de esta forma

Por simplicidad, se agruparán las variables de diseño $\mathbf{m} = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ y el resto $\mathbf{f} = (x_1, \dots, x_k)$. Además se puede renombrar $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ con $r = n - k$. De esta forma el Problema (7.1) queda

$$\begin{array}{ll} \max_{\mathbf{m} \in V} F(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \\ \text{sujeto a} \\ G_j(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \end{array} \quad (7.2)$$

Una solución al problema es un punto $\mathbf{m}^* \in V$ que sea solución de (7.2). Por supuesto, dicho problema puede no tener solución, tener solución única o tener solución múltiple (varios puntos, un conjunto numerable o un espacio paramétrico de soluciones). Es importante señalar que en este enfoque, el valor de \mathbf{f} es conocido y no es una variable del problema.

Variables de diseño

Como ya se ha comentado, las variables de diseño, representadas por el vector \mathbf{m} suelen ser un subconjunto de los parámetros del sistema. En lo que sigue se procederá a clasificar, en la medida de lo posible, la tipología de las variables de diseño. Se pueden establecer dos grandes grupos:

- **Variables iniciales:** Son todas las que condicionan el diseño inicial de la estructura. Generalmente, repercuten directamente en las inversiones en bienes de capitales (CAPEX, *CAPital EXpenditures*). Son un conjunto amplísimo de variables, entre las que se puede destacar:
 - **Propiedades de los materiales:** Son todas las variables que dependen de los materiales utilizados: sus propiedades elásticas, plásticas, resistentes, térmicas... así como todos los parámetros que intervengan en las ecuaciones de verificación.
 - **Parámetros geométricos:** Son las que definen las propiedades geométricas (y topológicas) de la estructura: dimensiones, conectividad, condiciones de contorno de las ecuaciones diferenciales implicadas...
 - **Variables de construcción:** Aunque de ámbito más cualitativo, estos factores pueden cuantificarse, aunque sea estableciendo grupos discretos. Incluyen el volumen de mano de obra y el tiempo de construcción, las técnicas y procedimientos utilizados...
- **Variables de operación:** Son todas las que condicionan el régimen de operación de la estructura, así como la gestión de la misma y el mantenimiento del sistema. Generalmente, repercuten directamente en los costes de operación (OPEX, *Operation EXpenditures*). Algunos ejemplos de estas variables son el periodo entre reparación de averías, la definición de umbrales de parada operativa, la regularidad e intensidad de las tareas de mantenimiento...

Aunque el abanico de estas variables puede ser inmenso, y cada una puede tener un espacio de valores muy diferente (desde un rango de valores continuo a un valor binario, pasando por valores definidos en intervalos o clases diferenciadas o conjunto discreto o finito de valores) suele ser habitual definir un **catálogo**.

Formalmente un catálogo para \mathbf{m} es un subconjunto **finito** $C \subset V$ de la forma

$$C = \{(m_1, \dots, m_r) \in V \mid m_i \in M_i, \text{card}(M_i) = N_i\}$$

Obsérvese que $\text{card}(C) = \prod_{i=1}^r N_i$. Si $N = \max_i \{N_i\}$, $\text{card}(C) \leq N^r$. La razón de esta definición estriba en que, en la práctica, no se suele disponer de una gama de elecciones en el continuo, sino que la mayoría de las veces se ha de elegir entre un número finito de posibilidades para los parámetros. Como caso extremo, obsérvese que no tiene demasiado sentido hablar de un acero con $E = 180\sqrt{2}$ GPA, de una tubería de diámetro $D = 10.250$ mm o de realizar visitas de mantenimiento cada $T = 30.5$ min.

Una vez definido el catálogo, el problema de optimización (7.2) se simplifica quedando

$$\begin{array}{l}
\text{máx } F(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \\
\mathbf{m} \in C \\
\text{sujeto a} \\
G_j(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l
\end{array}
\quad (7.3)$$

Este problema, resuelto mediante técnicas de *fuerza bruta*, requiere a lo sumo de N^r evaluaciones². El uso de estrategias óptimas para abordar este problema excede el ámbito de este estudio. Para el lector interesado en alternativas computacionales para estos paradigmas, ver [23] o [58].

Función objetivo

Como ya se ha comentado, en este estudio se considerará como función objetivo siempre una función vinculada a un rendimiento de tipo económico, aunque pueden establecerse otras pautas de rendimiento, basadas en otros criterios de rendimiento. Sería inconcebible, por poner un ejemplo, optimizar un sistema estructural orientado a la vivienda o a un uso infraestructural con respecto a criterios económicos si hay vidas humanas en juego.

Así las cosas, la función objetivo en este contexto siempre será el **beneficio de explotación**, que llamaremos p (del inglés, *profits*). El siguiente paso es vincular los beneficios al rendimiento estructural. La mayoría de las veces, esto es una tarea complicada, pero puede ponerse en práctica la metodología clásica de división del beneficio en **ingresos** y **costes**.

Ingresos

Los ingresos suelen estar asociados a la tarea productiva de la estructura, aquello para lo que fue diseñada. La gama de posibilidades para caracterizar la productividad de la estructura es enorme y el modelo puede ser tan complejo y detallado como se quiera. En general, los dos aspectos que intervienen en la productividad son:

1. **La integridad del sistema:** Si el sistema ha fallado (debido al agotamiento de algún elemento y el colapso parcial o global estructural consiguiente), deja de producir, al menos hasta que se repare. A su vez, esto puede depender de las variables ambientales extrínsecas (\mathbf{f}), que son las que provocarán el fallo (ver Capítulo 5 y Capítulo 6) y de los parámetros intrínsecos (\mathbf{m}).
2. **Las variables ambientales:** Especialmente en plantas de generación de energía, las variables ambientales como el viento (turbinas eólicas), el nivel de agua (energía hidroeléctrica), el oleaje o las mareas (energía undimotriz o mareomotriz) y la radiación (energía solar, sea termosolar o fotovoltaica)³.

Así, puede establecerse una función de productividad en un instante t considerado, $i(t)$. La productividad será funcionalmente dependiente de todas las variables internas del sistema, de forma explícita o implícita.

$$i(t) = f(\mathbf{m}, [\mathbf{f}(t)], t) \quad (7.4)$$

La notación $[\mathbf{f}(t)]$ indica que la dependencia funcional es respecto a la historia de valores de \mathbf{f} . Para modelos con memoria, como en el caso del presente estudio, es fundamental este detalle. Para modelos dinámicos, sin memoria, la dependencia suele ser local $[\mathbf{f}(t)] = (f(t), \dot{f}(t))$.

Costes

Los costes suelen estar asociados a la construcción, el mantenimiento y explotación del sistema, las tareas que deben llevarse a cabo para garantizar su correcto funcionamiento. De nuevo, las posibilidades para definir los costes son enormes, aunque se pueden definir dos clases de costes:

² Este número puede ser enorme, obsérvese que si se consideran $r = 30$ variables para el diseño y se discretiza usando $N = 1000$, $N^r = 10^{3 \cdot 30} = 10^{90}$ que es más que el número de partículas elementales estimado en el universo

³ Obsérvese que en la mayoría de los casos, como se trata de sistemas eléctricos, la dinámica del sistema adquiere una importancia fundamental si el análisis es fino

1. **Costes de construcción:** Son los costes de construcción del sistema, también conocido como coste inicial. Depende de los materiales empleados, la geometría (volúmenes considerados, excavaciones...), el coste de la mano de obra y el tiempo de ejecución... En definitiva, depende de los parámetros intrínsecos del sistema (\mathbf{m}).
2. **Costes de mantenimiento y explotación:** Son los costes asociados al mantenimiento del sistema, los inherentes a la explotación, las tareas de revisión y el coste de las reparaciones de elementos dañados... Estos costes dependen de la estrategia de mantenimiento escogida (periodo entre revisiones), de la frecuencia de avería o fallos, que a su vez dependen de las variables ambientales (ver Capítulo 5 y Capítulo 6), y del coste de reparación asociado a los mismos, además del de la mano de obra.

De nuevo puede establecerse una función de coste por unidad temporal en un instante t considerado, $c(t)$. La dependencia funcional es semejante a la de la función de ingresos, aunque ésta sea implícita.

$$c(t) = g(\mathbf{m}, [\mathbf{f}(t)], t) \quad (7.5)$$

Beneficio de explotación

Fijado un horizonte temporal T , llamado vida útil del sistema, el beneficio de explotación es:

$$p = \int_0^T (i(t) - c(t)) dt \quad (7.6)$$

Su cálculo se efectúa normalmente mediante discretización en intervalos temporales definidos mediante la partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ y desacoplando de la expresión explícitamente los costes de construcción o iniciales $c_0 = c(t_0)$:

$$p = -c_0 + \sum_{j=1}^M (i(t_j) - c(t_j)) (t_j - t_{j-1}) \quad (7.7)$$

En un problema de optimización, lo que importa es la dependencia de la función p respecto a las variables de diseño, por lo que los beneficios pueden expresarse como función de las variables de entrada ($\mathbf{m}; \mathbf{f}$) donde se insiste en que \mathbf{m} en este contexto son las variables independientes y \mathbf{f} son parámetros. Escribiendo $i(t_j) = i_j$ y $c(t_j) = c_j$, la Ecuación (7.7) queda:

$$p(\mathbf{m}; [\mathbf{f}]) = -c_0(\mathbf{m}) + \sum_{j=1}^M (i_j(\mathbf{m}, [\mathbf{f}]) - c_j(\mathbf{m}, [\mathbf{f}])) (t_j - t_{j-1}) \quad (7.8)$$

Estableciendo como función objetivo el beneficio de explotación en un horizonte temporal T , el problema de optimización (7.3) queda:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{m} \in C} p(\mathbf{m}; [\mathbf{f}]) \\ &\text{sujeto a} \\ &G_j(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (7.9)$$

Restricciones

Es momento de centrarse ahora en las restricciones, que es lo único que falta para cerrar el problema de optimización. Las restricciones, de nuevo, pueden establecerse en base a muchos y diversos criterios. No obstante, dichos criterios pueden clasificarse en dos grandes grupos:

1. **Cláusulas contractuales:** Cuando se firma un contrato para una concesión o explotación, siempre hay unas cláusulas de rendimiento. Una planta de producción de energía eléctrica, por ejemplo, no puede inyectar menos potencia de la definida en el contrato. Al fin y al cabo, el sistema se diseña para que tenga un rendimiento según lo establecido, para que desempeñe su función correctamente. El contrato, además, puede disponer de otras cláusulas no vinculadas directamente con la productividad, pero que sean requisito para la parte contratante por algún motivo u otro (social, político...) como el periodo de construcción.

- 2. Decisiones estratégicas:** Son las que vienen definidas únicamente por la parte contratada y pueden ser públicas o no. Corresponden a las decisiones en estrategia y el rumbo definido por la parte contratada en base a su régimen de funcionamiento interno. Estas decisiones, a su vez, pueden clasificarse en
- a) **Restricciones presupuestarias o materiales:** Cuando existan partidas presupuestarias fijadas o simplemente limitaciones en la financiación, la disponibilidad de activo líquido corriente u otras limitaciones materiales, las restricciones aparecen de una forma natural. Los recursos de un ente o empresa nunca son ilimitados.
 - b) **Imagen corporativa:** En el caso de empresas grandes que cuidan su imagen corporativa y que además cotizan en los mercados, la imagen que proyectan es fundamental. A veces no importa si un diseño es óptimo a nivel de presupuesto, si esto provoca una percepción negativa en los mercados, los inversores o la opinión pública. Del mismo modo, tecnologías atractivas e *impactantes* pueden condicionar muy positivamente a la opinión pública. En la 7.3 se dan algunos ejemplos.
 - c) **Responsabilidad social y ambiental:** Está vinculado a la ética empresarial, no tanto a la imagen transmitida por la empresa o el ente contratado. Son todas las restricciones que están fundadas en aspectos sociales, como puede ser establecer umbrales en el coste de la mano de obra o las horas de trabajo, preferir la inversión en mercados de materias primas autóctonas o ambientales, como puede ser reducir las emisiones o los residuos, reutilizar materiales, tener un impacto reducido en el paisaje...

Todas estas restricciones pueden formularse de forma explícita o implícita mediante las l ecuaciones de restricción $G_j(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \leq 0$, $j = 1, \dots, l$. Esto puede ser un proceso complejo, que además, en algunas decisiones de carácter estratégico como las vinculadas con la imagen corporativa o la responsabilidad social, está en muchas ocasiones, sujeto irremediamente a la subjetividad. Obsérvese no obstante, que el uso del catálogo para las variables de diseño simplifica el problema. Basta con realizar las, a lo sumo, N' evaluaciones de las variables para las l funciones G_j y decidir, en cada una de las N' evaluaciones, si al menos una de las l funciones arroja un valor inadmisibles.

7.1.2 Del problema determinista al problema probabilista

El problema de optimización estocástica con restricciones

Hasta ahora se ha centrado el interés sobre las variables de diseño, representadas mediante el vector \mathbf{m} , suponiendo el resto de variables, representadas mediante \mathbf{f} como parámetros fijos del problema. Sucede, no obstante, que las variables ambientales a menudo son desconocidas en un marco determinista. En otras palabras, las variables ambientales son variables aleatorias. Podría suceder que algunos parámetros del sistema fueran variables aleatorias, pero entonces éstos no se incluirían como variables de diseño, sino como miembros del resto de variables \mathbf{f} . Por simplicidad, no obstante, a partir de ahora, se llamará a las variables que intervienen en \mathbf{f} variables ambientales puesto que la mayoría lo son de verdad, y las que no lo son (parámetros que no intervienen en las variables de diseño) juegan el papel de parámetros puros que no intervienen en el problema, y pueden eliminarse del vector \mathbf{f} . También podría suceder que algunas de estas variables fueran conocidas y no se presentaran en un marco de incertidumbre. Esto no es problema puesto que las variables deterministas son un caso particular de variables aleatorias.

Así las cosas, se puede seguir trabajando con el vector \mathbf{m} de variables de diseño, pero ahora el vector del resto de parámetros, \mathbf{f} es un vector aleatorio, por lo que lo expresaremos mediante letra mayúscula \mathbf{F} . Esto cambia la naturaleza de todas las variables que dependen, de una forma u otra, del vector de variables ambientales \mathbf{F} , que se convierten en variables aleatorias. Entre ellas se encuentran la función de ingresos i (de ahora en adelante I), la función de costes c (de ahora en adelante C), la función de beneficios p (de ahora en adelante P) así como cualquier otra variable auxiliar que dependa funcionalmente de \mathbf{F} . Del mismo modo, el problema de optimización con restricciones se convierte en un problema de **optimización estocástica con restricciones**.

Esto involucra seleccionar, de acuerdo a lo que se comentó en el Capítulo 1, un **espíritu** $\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a optimizar. La componente económica ya se ha establecido, es el beneficio de explotación. La componente de actitud frente al riesgo depende de la aversión al riesgo considerada. Además, las restricciones deterministas deben sustituirse por restricciones de carácter aleatorio. Así, el problema de optimización dado por (7.9) queda:

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{m} \in \mathcal{C}} \theta(P(\mathbf{m}; [\mathbf{F}])) \\
& \text{sujeto a} \\
& \Pr[G_j(\mathbf{m}, [\mathbf{F}]) \leq 0] \geq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, l
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

El espíritu del problema

Como ya se ha visto, la elección del indicador paramétrico θ de la variable aleatoria P es un paso fundamental. Formalmente θ puede interpretarse como un funcional que va del espacio de funciones de distribución al espacio de números reales. La elección de θ , por lo pronto, debe satisfacer algunos criterios que intuitivamente vienen respaldados por su interpretación directa. Los conceptos aquí presentados están desarrollados por ejemplo en [73] y [6]. La propiedad más elemental de todas, es la propiedad llamada **invarianza traslacional**, que se expresa diciendo que $\theta(X + c) = \theta(X) + c$ si c es una variable determinista. Si θ verifica esta propiedad se dice que es una **medida del riesgo**. Además, son deseables otras propiedades

- **Normalidad:** Si $X = x$ es una variable aleatoria determinista, $\theta(X) = x$. Intuitivamente, esto significa que si no hay incertidumbre en los beneficios (o en general, en cualquier variable aleatoria), el indicador debería darnos el valor de la misma.
- **Monotonía:** Si $X \leq Y$ (esta desigualdad debe interpretarse en el sentido de la teoría de probabilidad), entonces $\theta(X) \leq \theta(Y)$. Significa que si, casi con seguridad, una variable es menor que otra, su riesgo es menor que el de la otra.
- **Homogeneidad:** Si $\lambda > 0$, $\theta(\lambda X) = \lambda \theta(X)$. La idea que lleva consigo es la de la proporcionalidad causa - efecto (o bien la independencia de las unidades).
- **Subaditividad:** $\theta(X + Y) \leq \theta(X) + \theta(Y)$. Es una propiedad que indica que la medida del riesgo θ , cuando se suman variables aleatorias, como mucho puede ser la suma de los riesgos asumidos (mezclar no crea riesgo).

Además, en muchas ocasiones es importante que θ tenga *buenas propiedades*. En el caso del presente documento, como se usa la herramienta del catálogo y el problema se resuelve por *fuerza - bruta*, las propiedades técnicas de θ no son decisivas. Simplemente, por complitud se citan a continuación propiedades deseables para trabajar con medidas de riesgo.

- **Cierre:** Si (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $(X_k) \rightarrow X$ en norma \mathcal{L}_2 (es decir $\|X_n - X\|_2 \rightarrow 0$) y $\theta(X_n) \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\theta(X) \leq 0$. Útil para problemas de convergencia.
- **Convexidad:** $\theta((1 - \lambda)X + \lambda Y) \leq (1 - \lambda)\theta(X) + \lambda\theta(Y)$, $\forall \lambda \in]0; 1[$. Esta propiedad es importantísima en general dentro de la teoría de la optimización. Obsérvese que esta condición se cumple si se cumplen la homogeneidad y la subaditividad.

Se dice que una medida del riesgo θ es **coherente** si satisface las condiciones de normalidad, subaditividad, homogeneidad y monotonía⁴. Al fin y al cabo, es lo que *uno desearía* que representara el indicador θ .

Queda por definir el concepto de **aversión al riesgo**⁵

- **Aversión al riesgo en el sentido amplio:** Se dice que una medida θ es aversa al riesgo en el sentido amplio cuando verifica, para toda variable aleatoria no constante X , $\theta(X) > \mathbb{E}[X]$.
- **Aversión al riesgo cuadrático:** Se dice que una medida θ es aversa al riesgo cuadrático cuando verifica que, para todo par de variables X e Y , si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ y $\sigma(X) < \sigma(Y)$, entonces $\theta(X) < \theta(Y)$.

Para terminar se dan algunos ejemplos de medidas del riesgo.

⁴ La teoría del riesgo [92] establece un marco más técnico para estas definiciones, incluyendo otros axiomas y propiedades, pero con lo aquí tratado es suficiente para establecer un contexto intuitivo, dejando de lado casos patológicos

⁵ Aunque *averso* es un arcaísmo y la locución más adecuada sería "adversa" al riesgo, se suele utilizar esta palabra en un contexto técnico más formal

- La más natural de las medidas de riesgo es la esperanza matemática, $\theta(X) = \mathbb{E}[X]$. Se trata de una medida del riesgo coherente, que además es lineal. Cuando la variable aleatoria X es el beneficio de explotación, la medida de riesgo es el **beneficio medio** $\bar{p} = \mathbb{E}[P]$. Esta medida no es aversa al riesgo en ninguno de los dos sentidos definidos.
- Una medida de riesgo también coherente y además aversa al riesgo en el sentido amplio, pero de poca utilización práctica, por su difícil estimación y complicada interpretación es $\theta(X) = \sup(X)$. Si la variable aleatoria es el beneficio de explotación, esta medida representa el **beneficio máximo**, que, en muchos casos, no necesariamente degenerados, podría ser $+\infty$ (por ejemplo si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Precisamente por esta razón, esta medida no es aversa al riesgo cuadrático. Basta considerar $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $Y \sim \mathcal{U}(-\delta; \delta)$ con $\delta > \sqrt{3}$ en cuyo caso $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ y $\sigma(X) < \sigma(Y)$ pero $\theta(X) > \theta(Y)$.
- Fijado $k > 0$, $\theta(X) = \mathbb{E}[X] + k\sigma(X)$ es una medida aversa al riesgo (a mayor valor de k , más aversión al riesgo), en los dos sentidos definidos anteriormente. Sin embargo, no es una medida coherente del riesgo, puesto que viola la condición de monotonía. En efecto, si se considera por ejemplo la variable $Y = 1$, y la variable X que vale -1 con probabilidad $p = 0.5$ y 1 con probabilidad $p = 0.5$ queda claro que a pesar de que $X \leq Y$, $\theta(X) = k$ y $\theta(Y) = 1$ por lo que para cualquier valor de $k > 1$, $\theta(X) > \theta(Y)$.
- Fijado $\alpha \in [0; 1]$, el cuantil $q_\alpha(X)$, es decir, el valor $q_\alpha = \min\{0 \leq q \leq 1 | \Pr[X \leq q] \geq \alpha\}$ (para distribuciones continuas es el valor q tal que $\Pr[X \leq q] = \alpha$) es una medida del riesgo muy intuitiva pero que no es coherente, ya que aunque verifica la normalidad, la monotonía y la homogeneidad, no verifica la subaditividad. En efecto, considérese $\alpha = 0.95$ y sea U una variable uniforme en $[0; 1]$ y defínanse $X_1 = 1000$, si $U \leq 0.04$, $X_1 = 0$ si $U > 0.04$ y $X_2 = 0$, si $U \leq 0.96$, $X_2 = 1000$ si $U > 0.96$. Sea $\theta(X) = q_\alpha(X)$. Entonces $\theta(X_1) = \theta(X_2) = 0$. Por otro lado, $\theta(X_1 + X_2) = 1000$ por lo tanto $\theta(X_1 + X_2) \geq \theta(X_1) + \theta(X_2)$. Tampoco es una medida aversa al riesgo necesariamente. Aquí se incluye lo que se denomina **Valor en Riesgo al nivel α** , que es precisamente el cuantil q_p con $p = 1 - \alpha$.
- Fijado $q \in [0; 1]$, el **Valor en Riesgo Condicionado al nivel q** , denotado mediante CVaR_q es, para variables aleatorias continuas, la esperanza condicionada $\mathbb{E}[X | X \geq \text{VaR}_q]$. En el caso general [75], la definición es algo más técnica para contemplar el problema de las singularidades y los átomos de probabilidad: se define el Valor en Riesgo Condicionado superior $\text{CVaR}_q^+(X) = \mathbb{E}[X | X \geq \text{VaR}_q]$ y posteriormente $\text{CVaR}_q(X) = \lambda_q(X)\text{VaR}_q(X) + (1 - \lambda_q(X))\text{CVaR}_q^+(X)$, con $\lambda_q(X) = \frac{F_X(\text{VaR}_q(X)) - q}{1 - q}$. Se comprueba que $\text{CVaR}_q^+(X) = \text{CVaR}_q(X)$ para variables aleatorias continuas. Puede demostrarse [2] que $\forall q \in]0; 1[$, CVaR_q es una medida del riesgo coherente y que además es aversa al riesgo en el sentido amplio. Debido a sus buenas propiedades, tanto intuitivas como computacionales (es una medida convexa y cerrada) es una de las medidas de riesgo más utilizadas.
- Otras medidas de riesgo más complejas son las **medidas de riesgo distorsionadas**. Dada una función $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente que verifique $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$ (función de distorsión), se define $\theta(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx$ donde F_X es la función de distribución de la variable X . Tomando g definida a trozos mediante $g(x) = 0$ si $0 \leq x \leq q$ y $g(x) = 1$ si $q < x \leq 1$ se obtiene el VaR_q . Tomando g definida mediante $g(x) = \frac{x}{q}$ si $0 \leq x \leq q$ y $g(x) = 1$ si $q < x \leq 1$ se obtiene el CVaR_q . Especialmente utilizada es la transformación proporcional de riesgo $g(x) = x^{1/\kappa}$, con $\kappa \geq 1$. El parámetro κ mide la aversión al riesgo, a mayores valores de κ , mayor aversión al riesgo. Si $\kappa = 1$, $g(x) = x$ y $\theta(X) = \mathbb{E}[X]$.

7.2 Resolución del problema

En esta sección se tratarán los aspectos relativos a la resolución del problema (7.10). Con resolución no sólo se está hablando del cálculo del punto óptimo, sino del análisis probabilístico posterior, que constituye también una parte fundamental.

Así, se considerarán dos fases en la resolución del problema:

1. Fase de diseño.
2. Fase de análisis.

7.2.1 Fase de diseño

Supóngase el problema dado por (7.10). Resolver el problema implica hallar $\mathbf{m}^* \in C$ tal que $\forall \mathbf{m} \in C$, $\theta(P(\mathbf{m}^*; \mathbf{F})) \geq \theta(P(\mathbf{m}; \mathbf{F}))$ y $\Pr[G_j(\mathbf{m}^*; \mathbf{F}) \leq 0] \geq \alpha_j$, $j = 1, \dots, l$.

La resolución del problema en un marco general puede ser imposible mediante técnicas analíticas, salvo para casos muy concretos. En el Capítulo 8 se presentarán varias técnicas para abordar problemas de carácter probabilístico y se discutirá la metodología empleada en este estudio.

Seleccionado el punto de óptimo rendimiento \mathbf{m}^* , la segunda fase de la resolución es el análisis en condiciones de incertidumbre.

7.2.2 Fase de análisis

Ahora ya se conoce el vector de parámetros de diseño óptimo \mathbf{m}^* , procede realizar un análisis del sistema en esas condiciones. En cualquier caso, aún se puede ir un paso más allá. Si $\mathbf{m}^* = (m_1^*, \dots, m_r^*)$ es el vector de variables de diseño en el óptimo, se puede, a posteriori, introducir incertidumbre en estas variables. Los modelos utilizados responden a lo que en el Capítulo 1 se llamó conveniencia estadística: las distribuciones utilizadas para modelizar no responden a una realidad física, sino que simplemente introducen de forma conveniente la incertidumbre en el sistema. Esto puede hacerse por varias razones, aunque a menudo esta incertidumbre se desprecia, salvo que la solución sea muy sensible a dicho parámetro

- **Desconocimiento con exactitud de las propiedades de un material:** El modelo ha seleccionado una cierta propiedad de un material en el catálogo propuesto, pero en realidad esta propiedad es una propiedad media. A veces, es muy osado garantizar que el módulo de elasticidad longitudinal de un acero o la densidad del hormigón tiene un valor único, normalmente existen ciertas fluctuaciones alrededor de sus valores de referencia.
- **Tolerancia en los parámetros geométricos o imperfecciones:** Las propiedades geométricas de los elementos, en general, sólo están garantizadas dentro de una tolerancia, a menudo especificada por el fabricante. No se puede especificar el diámetro de una tubería o el espesor de una lámina al micrómetro, la capacidad de un recipiente al milímetro cúbico o el radio de curvatura de una parábola al milímetro.
- **Ineficacia en la ejecución de las obras o trabajos:** Al ejecutar los trabajos de construcción del sistema, es imposible plantear una precisión absoluta en el acabado. Es difícil garantizar que un pilote se ha hincado exactamente lo necesario, que la masa de tierra de relleno es la que hacía falta o que la pendiente de un terraplén es exactamente la de diseño.

Así, fijado el valor \mathbf{m}^* , puede ser natural, en un contexto general, definir un nuevo vector aleatorio \mathbf{M} tal que se verifique $\mathbb{E}[\mathbf{M}] = \mathbf{m}^*$. Los modelos de incertidumbre para \mathbf{M} (en particular el error cuadrático, simetría, apuntamiento) tienen que definirse de forma apropiada.

El problema queda por lo tanto reducido al estudio de del sistema \mathcal{S} en condiciones de incertidumbre.

Análisis del beneficio

La variable aleatoria más importante es la que se ha usado para definir la función objetivo, que en el caso del presente estudio siempre será el beneficio económico, calculado en base a un determinado criterio de producción $P = Y_1$. Sabemos que su espíritu $\theta(P)$ es óptimo, sea cual sea la función θ . Se pueden calcular (o mejor dicho, estimar) varios valores asociados con el beneficio:

- **Beneficio medio (\bar{p}):** Es la esperanza de la variable aleatoria P , $\bar{p} = \mathbb{E}[P]$. Se interpreta como el beneficio esperado, o mejor, como el promedio de los beneficios que se obtendrían si el sistema se evaluara infinitas veces.
- **Riesgo de pérdidas (p_L):** Es la probabilidad de que se obtengan pérdidas $p_L = \Pr[P \leq 0]$. Es de esperar que sea pequeña, pero no nula.
- **Riesgo cuadrático neto (r):** Es la desviación típica de la variable aleatoria P , $r = \sigma(P) = \sqrt{V(P)}$. Indica el riesgo neto que tiene el sistema (tanto positivo como negativo). Si $r = 0$, el beneficio está libre

de riesgo, por lo que estamos ante un caso determinista. A mayor riesgo, mayor incertidumbre se tiene en el beneficio, pero como se verá, se suele cumplir la premisa de "*a mayor riesgo, mayor beneficio*" habitual en los mercados financieros: en efecto, una estructura puede estar sobredimensionada y por lo tanto es casi imposible que rinda por debajo de lo esperado, pero para ello se ha realizado una inversión muy importante. Esto se desarrollará en la última sección de este capítulo.

- **Valor en Riesgo al nivel q (VaR_q):** Es el beneficio que posee una probabilidad de no superación de $1 - q$, es decir, el beneficio por encima del cual te encuentras con una probabilidad q , es decir $\Pr[P \leq \text{VaR}_q] = 1 - q$. Es un indicador del riesgo en las mismas unidades que el beneficio.

Otro análisis importante del beneficio se realiza comparándolo con una variable aleatoria de referencia P_0 , cuya distribución es conocida a priori. Este valor de referencia podría ser el beneficio obtenido mediante otra inversión o incluso un valor determinista p_0 garantizado por un fondo libre de riesgo o una alternativa que se esté considerando. En este caso, se define el **margen de seguridad** $S = P - P_0$ y se pueden estimar de nuevo varios parámetros de interés:

- **Fiabilidad (f):** Es la probabilidad de que el beneficio obtenido por el sistema sea mayor que el dado por la variable aleatoria de referencia P_0 , es decir $f = \Pr[S \geq 0]$. En el caso de que $P_0 = p_0$ sea un valor determinista, $f = \Pr[P \geq p_0]$.
- **Índice de fiabilidad (β):** Es el beneficio obtenido por unidad de riesgo adoptada escogiendo el sistema en lugar de la alternativa dada por P_0 . Se calcula por tanto mediante $\beta = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$ donde $\sigma_S = \sigma(S)$ es la desviación típica de S y $\mu_S = \mathbb{E}[S]$ el valor esperado de S .

Análisis del rendimiento

Aunque el beneficio era la variable que se pretendía optimizar, hay otra serie de variables que pueden analizarse desde el punto de vista probabilista de cara a un conocimiento profundo del sistema en su punto de funcionamiento óptimo. Especialmente importantes son las variables que estaban restringidas, $Y_j = G_j(\mathbf{M}, \mathbf{F})$, $j = 1, \dots, l$. Análogamente a como se hizo con el beneficio, se puede definir un KPI mediante el margen de seguridad $S_j = Y_j - c_j$, donde no se tiene que cumplir necesariamente $c_j = 0$ ya que puede darse el caso que se pretenda evaluar el rendimiento del sistema más allá de las cláusulas del contrato, por ejemplo. Definido S_j se puede calcular:

- **Fiabilidad asociado al KPI j (f_j):** Es la probabilidad de que el rendimiento del sistema en términos de la variable j se produzca según lo pretendido, es decir $f_j = \Pr[S_j \leq 0]$. Por la propia definición del problema de optimización, evidentemente es de esperar que si $c_j = 0$ $f_j \geq \alpha_j$ ⁶.
- **Índice de fiabilidad del KPI j (β_j):** Es el margen de seguridad medio obtenido por unidad de riesgo del propio KPI, es decir $\beta_j = \frac{\mu_{S_j}}{\sigma_{S_j}} = \frac{\mu_{G_j(\mathbf{M}, \mathbf{F})} - c_j}{\sigma_{G_j(\mathbf{M}, \mathbf{F})}}$ donde el significado de todos los términos queda claro y la última igualdad es válida ya que c_j es un umbral determinista.
- **Fiabilidad total del sistema (F):** Es la probabilidad de que el sistema rinda según lo pretendido fijando el nivel de los umbrales c_1, \dots, c_l , esto es, la probabilidad de que todos los KPIs sujetos a restricciones las cumplan. Se calcula evaluando la probabilidad conjunta $\Pr[S_1 \leq 0, \dots, S_l \leq 0]$. Obsérvese que evaluar esta probabilidad conjunta requiere de la evaluación de una integral múltiple y puede resultar un proceso muy complejo. En general, raro es el caso en el que las variables S_j , $j = 1, \dots, l$ puedan suponerse independientes, en cuyo caso $F = \prod_{j=1}^l f_j$.

Otros KPIs que no son restringidos en el problema de optimización no tienen tanta importancia, no obstante, pueden estimarse sus propiedades estadísticas igual que se hace con cualquier variable aleatoria, de cara a entender el comportamiento del sistema y eventualmente, gestionarlo de una forma eficiente. Generalmente, para estos indicadores, los parámetros de posición, como la esperanza, la mediana y la moda, suelen ser los más utilizados. Algunos indicadores de rendimiento especialmente importantes de este tipo son el número de paradas operativas, el tiempo medio entre paradas operativas, el tiempo entre paradas más probable (moda) o el tiempo medio de parada.

⁶ Esto no es siempre cierto puesto que al introducir la incertidumbre en las variables \tilde{m} , las restricciones del problema podrían violarse, por lo que habría que volver a la fase de diseño

Análisis económicos, coberturas y financiación

Un último aspecto que se puede tratar en un contexto de incertidumbre es la evolución del sistema en función del tiempo. Supóngase, como se hará en este documento, que dos KPIs que pueden evaluarse para cualquier horizonte temporal T son los ingresos I_j , $j = 1, \dots, M$, definidos anteriormente y los costes de mantenimiento C_j . Queda claro que, para el horizonte temporal T se puede descomponer $[0; T] = \cup_{j=1}^M [t_{j-1}; t_j]$ y por lo tanto, si C_0 es la inversión inicial.

$$P = -C_0 + \sum_{j=1}^M (I_j - C_j) \quad (7.11)$$

Más aún, se puede establecer el beneficio después de pasados $h \leq M$ periodos de tiempo P_h , sin más que sustituir M por h en la Ecuación (7.11). Así, se puede definir el **tiempo de amortización** como el valor de h que anula P_h . No hay que olvidar que desde este punto de vista h es en realidad una variable aleatoria, y su intervalo de tiempo asociado, T_h , lo será también.

Cuando se consideran aspectos de financiación de una obra, son de vital importancia los conceptos de **Valor Actual Neto** (VAN) y **Tasa Interna de Rentabilidad** (TIR). Ambos son decisivos a la hora de evaluar una inversión. El primero da una idea del valor de la inversión, mientras el segundo da una idea de la rentabilidad de la misma, de cara a compararla con otras. El VAN se define en función del interés considerado i como el valor:

$$\text{VAN}(i) = -C_0 + \sum_{j=1}^M \frac{I_j - C_j}{(1+i)^j} \quad (7.12)$$

Respecto a la tasa interna de retorno, es el valor de i que anula la Ecuación (7.12), es decir, el valor i_R tal que $\text{VAN}(i_R) = 0$. De nuevo, es importante recordar que tanto el VAN como el TIR, en este contexto, son variables aleatorias y por lo tanto solo tendrán sentido directo indicadores asociados a ellas.

Por último, es muy utilizado en el mundo de las inversiones [12] el *Sharpe Ratio* que indica el beneficio obtenido en una inversión por unidad de riesgo asumida respecto a una inversión libre de riesgo, cuya rentabilidad en un horizonte temporal T es r_0 . De hecho, no es más que el índice de fiabilidad de la diferencia entre la rentabilidad del sistema y la rentabilidad de la inversión libre de riesgo, que suele considerarse la inversión en bonos del estado. Si $R = P/C_0$ es la rentabilidad del sistema en un horizonte temporal T (recuérdese que P es el beneficio y C_0 la inversión inicial)⁷ entonces:

$$\text{Sr} = \frac{\mu_R - r_0}{\sigma_R} \quad (7.13)$$

Obsérvese que Sr no es una variable aleatoria, sino un indicador directo de la inversión. En la teoría de optimización de carteras [12], se demuestra que la mejor cartera es la que posee el mejor *Sharpe ratio*, por lo tanto este valor puede ser importante de cara a la toma de decisiones estratégicas, a la búsqueda de inversores o a la creación de carteras de negocio.

7.3 Algunos comentarios sobre estrategias de diseño, gestión y financiación

En esta sección final del capítulo se ilustrará como la metodología seguida a lo largo del mismo es una herramienta potente sobre la que puede apoyarse el ingeniero de cara a la toma de decisiones. En muchas ocasiones, los ingenieros se ven abocados a una decisión que implica un compromiso y al final ésta se toma por conveniencia o por criterios más o menos subjetivos. Aquí se mostrará como el planteamiento del problema como se ha hecho en este capítulo permite **racionalizar** este proceso y por lo tanto garantizar en cierto modo que la decisión tomada es racional⁸.

⁷ Este cálculo sería más adecuado si se tuviera en cuenta la capitalización en el periodo intermedio, considerando $R = i_R$, la TIR.

⁸ Aquí se puede entrar en aspectos casi filosóficos. ¿Es una decisión racional una decisión correcta? La respuesta evidentemente no es trivial, pero en el ámbito de este estudio sólo se tratarán aspectos técnicos

7.3.1 Estrategias de diseño

El ingeniero, a la hora de diseñar sistemas, se enfrenta en muchas ocasiones a decisiones que involucren un compromiso.

Costes iniciales y de mantenimiento

El caso más habitual es el **compromiso entre costes iniciales y costes de operación y mantenimiento** en sistemas de carácter estructural. En general, materiales más resistentes, mejor caracterizados, y con mejores propiedades mecánicas son más caros. Sirva el ejemplo del acero (170.00\$/tonelada) frente al hierro (48.00\$/tonelada)⁹, el acero tiene mejores propiedades mecánicas, pero se ha obtenido como producto de un proceso industrial, por ello es más caro.

Diseñar estructuras más resistentes (incluyendo durabilidad) o con mejores propiedades mecánicas aumentará la inversión inicial, pero alargará su vida útil y disminuirá la frecuencia de los fallos y las reparaciones, por lo que disminuirá los costes de mantenimiento. Así, estructuras resistentes son más caras en un principio pero pueden resultar a la larga más rentables. La Figura 7.1 ilustra gráficamente este hecho. Como puede observarse, siempre existe un punto en el que el coste total es mínimo. Para estructuras más eficaces el coste inicial no compensa el ahorro en costes de mantenimiento. Para estructuras menos eficaces, sin embargo, el coste de mantenimiento y las reparaciones no compensan.

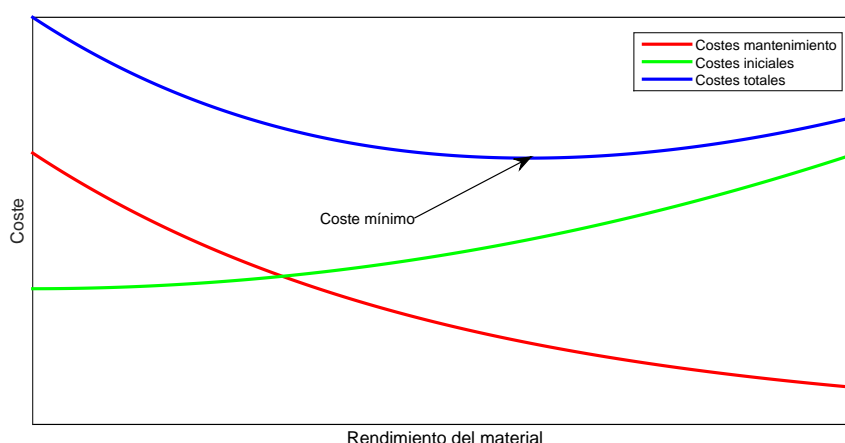


Figura 7.1 Ilustración del compromiso entre costes iniciales y costes de operación.

Este hecho alcanza todavía más relevancia en un contexto de incertidumbre, donde ya no se está hablando de que la estructura resiste o falla y hay que repararla, sino de que la probabilidad de que falle es mayor o menor. Estructuras muy caras tendrán asociadas probabilidades de fallo muy bajas, pero ¿hasta qué punto compensa? En este caso, los costes de mantenimiento representados en la Figura 7.1 tienen significados de riesgo, que se calcularía $R = P_{FALLO}C_{FALLO}$, donde P_{FALLO} es la probabilidad de fallo y C_{FALLO} es el coste del fallo, que es generalmente independiente de la estructura porque sus implicaciones son la pérdida de productividad.

En este contexto, la metodología presentada permite hallar el óptimo deseado.

Estructuras hiperestáticas

Es sabido que la utilización de estructuras de carácter hiperestático confiere al sistema una capacidad mayor para soportar cargas. Este hecho es todavía más notable si los cálculos se hacen en régimen plástico, en cuyo

⁹ Datos obtenidos a día 11 de noviembre de 2015

caso la reserva plástica puede multiplicar por un factor grande la capacidad estructural. El agotamiento de un elemento estructural no provoca el colapso, sino una redistribución de los esfuerzos, que va acompañada de la pérdida de un grado de hiperestatismo de la estructura.

Sucede, sin embargo, que generalmente estructuras hiperestáticas requieren de más elementos estructurales (más barras, por ejemplo, en una estructura de barras) o mejores condiciones en los apoyos (garantizar la unión rígida entre barras requiere uniones acarteladas u otras técnicas más sofisticadas de unión) que, inevitablemente, incrementan el coste de la estructura. De nuevo, como en el caso anterior, el ingeniero se pregunta ¿hasta dónde merece la pena invertir en hacer una estructura hiperestática?

La metodología presentada permite, gracias al concepto de catálogo, plantear las diferentes opciones valoradas y apostar por la más rentable. En el caso de una estructura de barras, esto es muy sencillo de implementar: basta con añadir términos no nulos en la matriz de rigidez estructural, que ilustra la topología y la mecánica de la estructura, y evaluar para todas las estructuras candidatas cuál maximiza el espíritu del problema.

7.3.2 Estrategias de gestión y operación

Otra de las tareas a las que se enfrenta el ingeniero es la gestión y operación de los sistemas. En muchas ocasiones, es difícil establecer una estrategia de mantenimiento óptima o definir los criterios de operación y parada.

Tareas de mantenimiento

Preguntas como ¿cada cuánto tiempo hay que revisar la obra?, ¿cuál es el periodo medio entre averías? o ¿merece la pena reparar componentes dañadas? son habituales cuando se programan las tareas de mantenimiento de un sistema. Naturalmente, lo ideal sería un control continuo de todos los procesos de forma que las averías o disfuncionalidades se detectaran y se repararan instantáneamente. En ocasiones, no obstante, esto es en la práctica imposible o carísimo. De nuevo hay que buscar siempre una solución equilibrada: un control excesivo puede tener un coste inabordable pero dejar un sistema abandonado puede resultar igualmente perjudicial (o no). Para el mantenimiento del sistema, son necesarios dos aspectos

1. Disponer de un criterio adecuado (o al menos, que pretende serlo) para establecer parámetros de mantenimiento tales como la frecuencia de revisiones, reparaciones u otras tareas de mantenimiento (la acumulación de polvo en los heliostatos de plantas termosolares, por ejemplo, reduce su eficiencia).
2. Una vez establecidos los parámetros de mantenimiento, conocer datos de gran interés como la frecuencia de averías, la vida útil de los subcomponentes del sistema, los momentos de mayor riesgo de avería... Esto permite planificar de forma activa el mantenimiento del sistema, permitiendo tener el número justo de piezas de repuesto en *stock*, diseñando los horarios y las rutinas de mantenimiento o fijando los momentos de parada total para efectuar las revisiones pertinentes.

Por supuesto, no existe en el mundo de la ingeniería nada infalible. El método presentado no es una receta milagrosa para diseñar y gestionar el mantenimiento de plantas de energía u otros sistemas productivos, pero este método siempre arrojará algunas conclusiones que, con la experiencia y la evolución y adaptación de los modelos en función de los sucesos, dará cada vez mejores resultados.

Operación y parada

Otro aspecto vital en el día a día de los sistemas productivos es la gestión de los mismos. No sólo en cuanto al mantenimiento, sino porque en muchos casos es necesaria bajo ciertas condiciones una parada operativa. Por ejemplo, un puerto comercial o un aeropuerto cierra con condiciones climatológicas adversas. No tan a gran escala, los colectores cilindroparabólicos de concentración solar se abaten ante situaciones de vientos demasiado fuertes que pueden suponer una amenaza para la estructura. ¿Dónde se fija el umbral de abatimiento? Umbrales muy altos requerirán estructuras más robustas y por lo tanto más caras, pero umbrales muy bajos provocarán que el colector esté gran parte del tiempo abatido y no contribuya a la producción energética. Del mismo modo, diques más robustos permitirán que algunos puertos funcionen ante condiciones meteorológicas muy adversas, pero en muchas ocasiones es difícil encontrar el punto de máximo rendimiento.

Gracias al método propuesto, la introducción de parámetros de operación en las variables de diseño permite abordar estos temas de una forma natural y racional. Además, una vez resuelto el problema de análisis, el estudio de los KPI permite disponer de un conocimiento total sobre la operatividad del sistema. Ya se ha hablado de parámetros como el número de paradas operativas, el tiempo medio entre paradas operativas, el tiempo entre paradas más probable (moda) o el tiempo medio de parada. Esto, no sólo permite llevar un control mucho más ajustado de la gestión (planificación de turnos o horarios, control de los consumos y los residuos generados...) sino que permiten establecer acuerdos con otras personas o entidades. El director de un puerto no sólo podrá decirle al capitán de un buque si tal día podrá o no atracar en un determinado muelle, sino la probabilidad que tiene de hacerlo.

Realimentación

Error y aprendizaje son dos conceptos que son inherentes a las tareas del ingeniero. Es posible, por no decir muy probable, que en el momento del diseño no se dispusieran de datos suficientes para el establecimiento de un modelo potente y preciso del sistema en cuestión (por ejemplo, no se dispusieran de datos suficientes para un ajuste adecuado de las distribuciones de las variables aleatorias implicadas). Aquí, el uso de técnicas de **Estadística Bayesiana** [45] puede ser fundamental. Estas técnicas permiten la incorporación progresiva de nuevos datos (que además puede que sean de más calidad, ya que si se ha localizado una planta en un determinado lugar, es posible que se puedan colocar dispositivos de medida para registrar las variables ambientales) que realimentan el sistema y permiten afinar los ajustes obtenidos anteriormente. Cuanto mayor sea el volumen de datos, menos incertidumbre habrá en los modelos, más ricos podrán ser y mejor servirán para hacer pronósticos en la gestión de la planta. Esta realimentación continua ofrece enormes posibilidades de gestión.

Otra situación, más dramática, es que se hayan propuesto modelos para las variables aleatorias directamente erróneos. Como el diseño ya se ha realizado y muchas de las variables de diseño no pueden ser modificadas, habrá que asumir que el rendimiento del sistema es subóptimo. Con ello, el esfuerzo fundamental tiene que realizarse en la gestión. La incorporación de modelos más realistas o adecuados para las variables aleatorias permite recalcular el sistema con las nuevas condiciones de incertidumbre y tomar decisiones a futuro. El sistema, en la medida de lo posible, evolucionará de forma dinámica para adaptarse a las nuevas condiciones y aunque su funcionamiento pueda no ser nunca el deseado, el trabajo de modelización ya está hecho, y sólo es necesario cambiar los modelos paramétricos de las variables aleatorias para el cálculo de resultados que lleven a análisis enfocados a la mejora.

7.3.3 Estrategias de financiación y otros aspectos económicos

El último punto que se tratará en este capítulo tiene que ver con aspectos económicos o relativos a la financiación. Como se ha visto, el método propuesto para el análisis de sistemas permite el manejo de indicadores económicos como el VAN, la TIR, el periodo de amortización T_H o de inversión como el *Sharpe Ratio* SR.

A continuación veamos varios marcos en los que se puede sacar partido disponer de esta información.

Retorno de la inversión

Estratégicamente, sobre todo de cara a balances y resultados, es importante saber a partir de cuando un sistema está amortizado, es decir, cuanto periodo tiene que pasar para que el sistema genere beneficios. Una observación trivial es que si el proyecto tiene un horizonte temporal T y $T_H > T$ (esta desigualdad hay que interpretarla en el sentido probabilista) el proyecto **no es viable para ninguna de las condiciones de diseño**. Esto es equivalente a que la función objetivo P verifique $P \leq 0$. El matiz en esta observación es que no es viable para ninguna de las condiciones consideradas. El método propuesto, en este sentido, es un **filtro de proyectos**.

Además, análisis más sofisticados pueden comparar diferentes proyectos estudiando el margen aleatorio $P_1 - P_2$ (igual que se puede comparar un proyecto con otro tipo de inversión que reporte unos beneficios P_0 , como se ha comentado anteriormente). En este sentido, el método propuesto es un **comparador de proyectos**. Se puede hacer mejor: el beneficio final no tiene en cuenta la tasa de descuento. Si la explotación de una planta por ejemplo genera plusvalías durante la gestión de la misma, la disponibilidad del dinero es algo que se debe valorar. Así, la forma más correcta de comparar dos proyectos es comparando indicadores

económicos que tengan en cuenta la capitalización: el VAN y la TIR, calculados para unas condiciones dadas de diseño son las herramientas más adecuadas en este caso.

El VAN refleja la viabilidad de un proyecto teniendo en cuenta la capitalización, por lo que resulta en algunos casos más descriptivo que el beneficio a la hora de apostar por una determinada inversión. La TIR, de forma complementaria, permite comparar directamente la rentabilidad de varias inversiones. Si por ejemplo se da el caso de que la TIR es menor que el interés para un periodo T de un activo libre de riesgo, el proyecto no tiene razón de ser, ya que invertir ese mismo dinero en bonos daría mayor beneficio y con un riesgo nulo.

Así, la metodología descrita es una herramienta muy útil para el estudio del retorno de la inversión y por consiguiente para la toma de importantes y decisivas decisiones estratégicas.

Seguros

Considérese ahora que el proyecto se ha considerado rentable y se apuesta por él. El conocimiento de los indicadores económicos permite el diseño de coberturas mediante seguros¹⁰.

Los seguros son la herramienta fundamental para la transferencia del riesgo. Esta transferencia del riesgo se hace mediante el pago de una prima que cubre ciertas condiciones estipuladas en un contexto. El conocimiento del sistema desde el punto de vista probabilístico permite cuantificar en mayor o menor medida el valor de la prima asociada a un marco determinado. ¿Desde qué coste merece la pena asegurar una planta ante catástrofes ambientales? ¿Cuál es la penalización asumible que se puede añadir en un contrato si el sistema no rinde como en éste se especifica?

Estas y otras muchas preguntas pueden abordarse desde una perspectiva racional con la metodología presentada.

Cartera de productos y diseño de coberturas internas

Todavía se puede ir un paso más allá. El conocimiento de indicadores como la TIR o el SR permite crear carteras de proyectos. La teoría de optimización de carteras de Markowitz [12], aunque sencilla, otorga herramientas racionales para el diseño racional de carteras de productos. Es sabido, por ejemplo, que la diversificación de proyectos reduce el riesgo. Carteras que contengan proyectos cuyas TIR estén negativamente correlacionadas reducen notablemente el riesgo, mientras que las positivamente correlacionadas lo aumentan.

En el mismo marco, la teoría de Markowitz establece el *Mutual fund separation theorem* que predice que en una cartera de productos que incluye un producto libre de riesgo, existe una única combinación de los activos que optimiza la cartera, en el sentido que minimiza el riesgo para una tasa de retorno considerada. La Figura 7.2 muestra gráficamente la idea subyacente a la teoría de optimización de carteras. Para poder usar carteras de productos y poder realizar coberturas con esta u otras teorías más complejas, es imprescindible no sólo conocer los retornos de las inversiones (TIR), sino también el riesgo al que están sujetas.

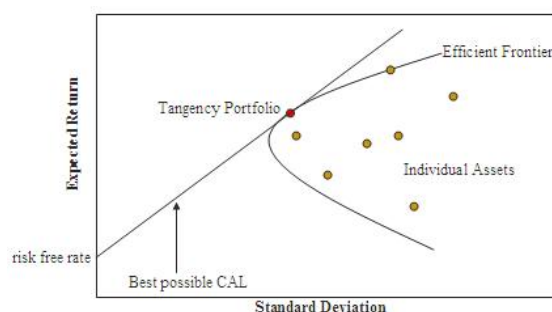


Figura 7.2 Frontera eficiente de Markowitz en el contexto de optimización de carteras.

¹⁰Es importante señalar que el marco de los seguros considerado en este documento está asociado a la incertidumbre en las variables ambientales, mientras que hay otros riesgos geopolíticos, sociales, económicos...

8 Métodos matemáticos para problemas probabilísticos

We must become more comfortable with probability and uncertainty.

NATE SILVER, 1978

En este capítulo se introducen brevemente las técnicas más habituales para lidiar con problemas probabilísticos. No se pretenden abordar todos los conceptos, para los que se irán dando referencias a lo largo del texto, sino presentar de forma natural las técnicas más habituales utilizadas para resolver este tipo de problemas:

El método de estudio planteado en este documento, como se ha dicho ya, requiere de dos fases para su resolución:

1. Una primera parte en la que se resuelve un problema de programación estocástica (optimización con función objetivo y restricciones sujetas a incertidumbre).
2. Una segunda parte en la que se realiza un análisis estadístico en el punto óptimo.

En este capítulo se presentarán las herramientas más habituales para tratar estos problemas.

En primer lugar se presentarán los modelos más habituales para tratar con problemas de fiabilidad, lo que correspondería con la segunda parte del problema. Se irá de los métodos más sencillos, llamados **Métodos de Nivel I** a los más complejos, llamados **Métodos de nivel III**, que son los que se usarán en este documento, y consisten en un cálculo directo de la probabilidad deseada mediante la integración de la densidad conjunta.

Posteriormente, se hará una breve introducción a la programación estocástica, que proporciona las herramientas para resolver la primera parte del problema. Se presentará el problema equivalente certero como un recurso que en ocasiones puede dar alguna información sobre el sistema y se introducirá el concepto de escenario, que además de servir para problemas donde las variables aleatorias pueden tomar un conjunto de valores discretos, son, en el límite, el resultado de una forma de tratar numéricamente los problemas de programación estocástica, basándose en un remuestreo de los datos, es decir, en el uso de la distribución empírica de los datos.

Finalmente, se presentará el Método de Montecarlo, en su versión más simple, para el cálculo de probabilidades y parámetros mediante inferencia paramétrica. Este marco resultará particularmente adecuado para tratar el problema con estructuras con memoria, aunque tiene la desventaja del coste computacional asociado al mismo. Se explicará para concluir cómo este método se utilizará para resolver el tipo de problema presentado en este trabajo tanto en la etapa de diseño como en la etapa de análisis.

8.1 Métodos probabilísticos para el análisis de fiabilidad

A continuación se presentarán los métodos tradicionales utilizados en el cálculo de fiabilidad. Estos métodos se utilizarán en el marco de este estudio para la estimación de toda clase de probabilidades, tanto dentro de una fase del problema de optimización ya presentado (fase de diseño), como a nivel de post - proceso (fase de análisis), para la caracterización de la estadística del sistema en su punto óptimo.

Estos métodos están orientados al diseño de sistemas y eventualmente al cálculo de probabilidades. Dichas probabilidades son las asociadas a regiones de valores que puede adoptar una (o varias) variables aleatorias, cuya distribución (marginal y conjunta) es conocida.

En el estudio presentado, estas probabilidades se calculan en el marco de las restricciones que aparecen en el problema de optimización con restricciones presentado en el capítulo 7, que, como se verá en este capítulo, puede plantearse de una forma simple (aunque computacionalmente costosa) gracias al concepto de catálogo.

Tradicionalmente, no obstante, las probabilidades se han vinculado siempre a modos de fallo, por lo que en este apartado, nos referiremos a dichas probabilidades con esa terminología:

- Las ecuaciones de verificación, asociadas a modos de fallo, jugarán el papel de las restricciones del problema.
- Las probabilidades de fallo serán en realidad probabilidades de no cumplimiento de la restricción correspondiente.
- La región de seguridad será en realidad la región de aceptación o de factibilidad de la restricción considerada. Lo mismo puede decirse de la región de inseguridad, que será la región de rechazo.

Se puntualiza esto con el fin de resaltar que con los métodos tradicionales, el acento se pone directamente en los modos de fallo del sistema, que son el núcleo central del análisis. En este documento, no obstante, se ha presentado un desarrollo más flexible en el que el ingeniero convive, si es que así lo desea, con el fallo del sistema, en aras de un rendimiento superior en términos económicos.

8.1.1 Métodos de nivel I

Por su simplicidad y su fácil entendimiento, los métodos de cálculo conocidos como **Métodos de Nivel I** son los más utilizados en el ámbito de la ingeniería civil, y aparecen reportados directa o indirectamente en las normativas habituales [40], [38], [30]. Es importante señalar que estos métodos no proporcionan la probabilidad de fallo, sólo reducen el problema a un problema determinista asociado que da una idea general de si se produce o no el fallo del sistema. Se incluyen en esta sección el método del coeficiente de seguridad global y el método de los coeficientes parciales.

El primer paso en estos métodos es fijar unas condiciones específicas en las que se realizará el cálculo, a saber:

- Fase de proyecto.
- Estado límite considerado, según la clasificación clásica que se dio en el Capítulo 1.
- Condición de trabajo.
- Tipo de combinación.
- Horizonte temporal.

Método de coeficientes de seguridad global

Se aplica cuando el alcance de los trabajos es el de un Estudio Previo o cuando el riesgo es bajo. Consiste en evaluar la ecuación de verificación escrita en forma de cociente y comparar el resultado con un coeficiente Z_c , llamado de seguridad global, $Z > Z_c$ con $Z = \frac{S}{C}$. S tiene el significado de **solicitud** del sistema, y contiene los términos favorables a evitar la ocurrencia del modo (de fallo o parada) y C el de **capacidad**, y contiene los términos desfavorables.

Lo fundamental es que aquí, **las incertidumbres** conocidas y desconocidas asociadas al proceso de cálculo, la disponibilidad de los datos, la exactitud de los modelos utilizados, la validez de la ecuación de verificación etc., se deben evaluar mediante **el valor del coeficiente** Z_c . El valor del coeficiente, está recogido en reglamentos técnicos y recomendaciones, en base a una **larga experiencia**. Los valores utilizados de S y de C llamados **valores característicos**, son los asociados, empíricamente, a un cierto nivel de probabilidad (inferior para los favorables, superior para los desfavorables), por ejemplo, 95 %, tal y como se detalló en el Capítulo 1.

La ecuación de verificación, con esta metodología, se establece para un marco muy específico, y suele modificarse (mediante reescalamiento de algunos parámetros) en función de las condiciones de trabajo. El valor de los términos que en ella intervienen (factores del medio físico, factores condicionantes, valor de los términos favorables y desfavorables del medio físico, valor de los términos controlados por la resistencia del terreno o los materiales y valor de los términos permanentes) deben tomarse de acuerdo con las especificaciones normativas, aplicando, si procede, un **coeficiente de compatibilidad** Ψ (ver siguiente apartado). Es importante señalar que en este método toda la incertidumbre relativa a la variabilidad de las variables consideradas individualmente debe reflejarse en el valor de Z_c , mientras que la incertidumbre relativa a la combinación de los términos (lo que en este texto se ha tratado mediante el coeficiente de correlación lineal, y que en general debería tenerse en cuenta mediante la distribución conjunta) debe reflejarse en los coeficientes de compatibilidad.

Método de los coeficientes parciales

Se trata de un método algo más preciso que el anterior, puesto que cuantifica de forma desagregada la incertidumbre de cada uno de los términos y por lo tanto se utiliza para elementos o tramos de riesgo algo mayor. El método consiste en evaluar la ecuación de verificación escrita en formato de margen de seguridad, donde cada término de la ecuación se ve afectado por un coeficiente denominado coeficiente parcial. Dichos coeficientes **ponderan y compatibilizan** los términos, en una expresión aditiva que resulta ser de forma compacta $S = \sum_{i=1}^I a_i X_{1,i} - \sum_{j=1}^J b_j X_{2,j} = \sum_{i=1}^I X_{1,i,d} - \sum_{j=1}^J X_{2,j,d} > 0$. a_i y b_j son los coeficientes parciales que ponderan y compatibilizan el valor característico de los I términos favorables $X_{1,i}$ y J desfavorables $X_{2,j}$. Los términos $X_{1,i}$ y $X_{2,j}$ son los términos de la ecuación y pueden representar cualquier factor de proyecto, parámetro, agente, acción,... en definitiva, cualquier variable de entrada del problema. Los valores $X_{1,i,d}$ y $X_{2,j,d}$ se denominan valores de cálculo.

Como se ve, en este caso las **incertidumbres** conocidas se vinculan a cada uno de los términos que intervienen, mediante los coeficientes de ponderación parciales a_i y b_j . Dichos coeficientes, además de la incertidumbre propia a cada término, involucran los coeficientes Ψ_i y Ψ_j de combinación, que reflejan la incertidumbre en la combinación de los términos. Así, se puede expresar $X_{1,i,d} = p_{1,i} \Psi_{1,i}$ y $X_{2,j,d} = p_{2,j} \Psi_{2,j}$ o bien $S = \sum_{i=1}^I p_{1,i} \Psi_{1,i} X_{1,i} - \sum_{j=1}^J p_{2,j} \Psi_{2,j} X_{2,j}$. Los valores de $p_{1,i}$ y $p_{2,j}$ reflejan los coeficientes de ponderación que reflejan la incertidumbre, relacionándola con las condiciones de trabajo, la fase de proyecto, el estado límite considerado, la clasificación por su origen o función y es favorable o desfavorable. Los valores $\Psi_{1,i}$ y $\Psi_{2,j}$ reflejan el estado de combinación y a la vez dependen de la clase estadística de valores del término. Ambos tipos de coeficientes vienen especificados en las normativas específicas o recomendaciones prácticas [38], [40], [30].

De nuevo, la ecuación de verificación se establece en un marco muy específico que deberá ser respetado, o, a lo sumo, reescalado convenientemente.

Una descripción más detallada del método así como la estrategia para el cálculo de los coeficientes de ponderación puede consultarse en [30].

En definitiva, los métodos de Nivel I son sencillos y de aplicación directa para todas las situaciones de proyecto: requieren únicamente de cálculos algebraicos, vinculados de una manera u otra a diversos aspectos del proyecto. Sin embargo, debido a su naturaleza *semi-probabilística* no permiten el cálculo de probabilidades de fallo, y por lo tanto no informan sobre la fiabilidad de los sistemas. Son una herramienta de primer nivel de acercamiento al problema (de ahí el nombre). Cuando se dispone de más información sobre el sistema, como puede ser vía el conocimiento de la función de distribución conjunta de todas las variables de entrada, el enfoque del problema puede ser más riguroso y adecuado.

8.1.2 Métodos de nivel II

Los **Métodos de Nivel II** van un paso más allá, ya que usan la información estadística dada por la distribución conjunta de las variables de entrada implicadas, o lo que es lo mismo, la información de la variabilidad del vector aleatorio que se refiere a la población de todas las variables. Dicha información puede ser conocida a priori o puede haber sido ajustada mediante técnicas estadísticas, como se ha hecho en el Capítulo 2 y en el Capítulo 3. Para ello se parte de una ecuación de verificación de la forma $S = G(X_1, \dots, X_n) > 0$, donde $X_i, i = 1, \dots, n$ son las variables involucradas en la misma y se postula el conocimiento de $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Sucede en ocasiones que se conoce la distribución conjunta de parte de las variables de entrada, o de diferentes grupos de entre ellas. Este método requiere de la distribución de todas ellas, por lo que, en primer lugar, habrá que establecer modelos probabilísticos para todas las variables implicadas, aunque estos modelos sean de conveniencia, como se especificó en el Capítulo 1. En segundo lugar, si se desconoce la dependencia entre variables, habrá que establecerla de alguna forma u otra, aunque sea mediante el coeficiente de correlación lineal ρ . Es habitual (pero peligroso) suponer que dos variables cuyo coeficiente de correlación lineal es $\rho < 0.2$ son independientes y que si $\rho > 0.8$, son linealmente dependientes. Para otros valores del coeficiente de correlación, dicha correlación debe tenerse en cuenta de forma explícita.

Debe señalarse que, estrictamente hablando, los Métodos de Nivel II sólo permiten calcular la probabilidad de fallo exacta cuando:

- La ecuación de verificación es lineal $G(X_1, \dots, X_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$.
- Las variables que intervienen se distribuyen según una normal.
- Las variables que intervienen son independientes.

En este caso, los Métodos de Nivel II consisten en el cálculo secuencial de los siguientes valores (para una explicación más detallada, puede consultarse [59])

1. Cálculo de las variables reducidas $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$ donde $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$ y $\sigma_i = \sigma(X_i)$.
2. Expresión de la ecuación de verificación en las variables reducidas, $\tilde{G}(Y_1, \dots, Y_n) > 0$ con $\tilde{G}(y_1, \dots, y_n) = G(x_1, \dots, x_n)$.
3. Cálculo del índice de fiabilidad $\beta = \min_{g(y_1, \dots, y_n)=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ (Problema de optimización con restricciones determinista). Dicho problema tiene solución analítica (se trata de la distancia del origen a un hiperplano) dada por $\beta = \frac{|a_0|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$.
4. Cálculo de la probabilidad de fallo $p = \Phi(-\beta)$, donde Φ es la función de distribución de la normal estándar.
5. Cálculo de las sensibilidades respecto a cada variable. De nuevo la fórmula analítica existe y vale $\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$.

En caso contrario, lo que realmente se calcula es la probabilidad de fallo más probable, que, en muchas ocasiones, es cercana a la probabilidad de fallo. Una ventaja de los Métodos de Nivel II, no obstante, es que aportan información sobre la **sensibilidad** a las diferentes variables de diseño, es decir, cuantifican el efecto de las variaciones de cada uno de los parámetros en la variación de la probabilidad de fallo (más probable).

Para el caso general, se considera el problema de programación matemática siguiente para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, si $x_p = M(\mathbf{X})$ representa la moda de \mathbf{X}

$$\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\| \\ \text{sujeto a} \\ G(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

Este problema es un problema de programación no lineal, en ocasiones difícil de resolver, por lo que, a menudo, se suelen usar técnicas de linealización de la función G (mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función G , linealización de primer orden), se convierten las distribuciones dependientes en independientes (mediante la transformación de de *Roseblatt*, dada por $Y_i = X_i | X_1 \cdots X_{i-1}$, para $i = 1, \dots, n$), y se realiza una transformación a variables gaussianas equivalentes. Este último paso se hace imponiendo que, en un entorno del punto \mathbf{x}_0 considerado en cada iteración, para cada variable $X = X_i$, existen unos valores μ y σ (momentos de segundo orden) tales que $F_X(x) \simeq \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, para $x \simeq x_0$. De aquí se obtienen los parámetros de la normal equivalente: $\sigma = \frac{1}{f(x_0)} \phi\left(\Phi^{-1}(F_X(x_0))\right)$ y $\mu = x_0 - \Phi^{-1}(F(x_0))\sigma$ con f y F funciones de densidad y distribución respectivamente de X y ϕ y Φ funciones de densidad y distribución respectivamente de la normal estándar.

Como se realiza una aproximación lineal de primer orden y se calcula una normal equivalente a partir de los dos primeros momentos, estos métodos se conocen como métodos de primer orden y segundos momentos (FOSM, *First Order Second Moments*).

En definitiva, los Métodos de Nivel II sólo funcionan de forma óptima para ecuaciones de verificación lineales, y variables normales e independientes, pero constituyen en muchos casos una herramienta potente no sólo para estimar probabilidades de fallo, sino también las sensibilidades respecto a todas las variables de entrada. Además, para casos que no se adapten a las hipótesis anteriores (linealidad, normalidad e independencia), existen técnicas numéricas y algoritmos iterativos para el cálculo del índice de fiabilidad y las sensibilidades.

8.1.3 Métodos de nivel III

Los **Métodos de Nivel III** son los métodos que buscan el cálculo directo de la probabilidad de fallo, independientemente de las condiciones del problema, aunque requieren, como en el caso anterior, del conocimiento de la función de distribución conjunta del vector aleatorio formado por las variables de entrada. Supóngase de nuevo que se pretende trabajar con la ecuación de verificación $S = G(X_1, \dots, X_n) > 0$. Aunque llevar a cabo este cálculo puede ser una ardua tarea, conceptualmente el método es muy sencillo: calcular directamente el valor de la integral:

$$p = \int_{G(x_1, \dots, x_n) \leq 0} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

En prácticamente la totalidad de los casos, la obtención de este valor mediante métodos analíticos es imposible. Existen dos alternativas, de índole numérico, para lidiar con este problema

- Cálculo mediante cuadraturas numéricas: Puede utilizarse una malla de puntos sobre las regiones de fallo, de forma que la integral se aproxime por una integral separable mediante el teorema de *Fubini*. Posteriormente, las técnicas habituales de integración numérica (regla de los trapecios, regla de *Simpson*, cuadraturas de *Gauss*) se utilizan para el cálculo de las integrales unidimensionales resultantes. El error de cálculo será la combinación de un error de discretización al realizar la malla sobre el dominio y un error inherente al método numérico de cuadratura escogido.
- Cálculo mediante técnicas de tipo Montecarlo: Se consideran realizaciones \mathbf{x}^k , $k = 1, \dots, N$, del vector aleatorio \mathbf{X} generadas a partir de su ley (conocida) mediante técnicas de generación de números aleatorios. Posteriormente se aproxima la integral mediante $p \simeq p_M = \frac{\text{card}\{\mathbf{x}^k | g(\mathbf{x}) \leq 0, k=1, \dots, N\}}{N}$. El tamaño de la muestra necesario para garantizar una tolerancia ε determinada depende de la probabilidad p que se desea estimar, para un nivel de confianza α dado (esto es, para que la probabilidad estimada verifique $\Pr[|p_M - p| < \varepsilon] = 1 - \alpha$). Este es el método habitual para integrales múltiples donde la dimensión del espacio de cálculo es alta y es el que se seguirá en este estudio. La última sección de este capítulo se extiende sobre el método y justifica su adecuación.

Los métodos de nivel III, en resumen, son los que calculan directamente la probabilidad asociada a un determinado fallo, mediante una integración de la función de densidad sobre la región de fallo. Aunque conceptualmente estos métodos son sencillos, requieren, en general, de un enorme coste computacional, ya que el tamaño de la muestra necesaria para garantizar la precisión en el cálculo de la probabilidad puede ser muy grande, en especial para probabilidades pequeñas.

8.2 Programación estocástica

Se presentan ahora técnicas para el estudio de problemas de programación estocástica. Estos problemas engloban una clase general de problemas que incluyen el presentado en el Capítulo 7. Las consideraciones que se expondrán están basadas en [78], excelente libro para adentrarse en el mundo de la programación estocástica. En [14] se realiza una aproximación algo diferente al problema, pero contiene muchos ejemplos prácticos.

Se han renombrado las variables y funciones del problema para utilizar la notación habitual en programación estocástica. Sea $x \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, ω un vector aleatorio de dimensión v cuya distribución conjunta f_ω es conocida, $f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^v$, $i = 1, \dots, m$ son funciones conocidas y $\theta: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es un indicador paramétrico.

$$\begin{aligned} & \max_{x \in V} \theta(f_0(x, \omega)) \\ & \text{sujeto a} \\ & \Pr[f_i(x, \omega) \leq 0] \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8.1)$$

Aunque en este estudio el problema que se resolverá un problema concreto muy específico, el marco de este trabajo pretende ser general para el estudio de rendimiento de sistemas mecánicos, por lo tanto, se tratará de presentar una serie de pautas y resultados de carácter general. En el ejemplo anterior, f_i , $i = 0, \dots, m$ y f_ω son los datos del problema y θ es una función definida que representa la actitud frente al riesgo (una medida del riesgo, generalmente).

8.2.1 Problema equivalente certero

El problema **equivalente certero** al dado por (8.1) es el dado por

$$\begin{aligned} & \max_{x \in V} f_0(x, \mathbb{E}[\omega]) \\ & \text{sujeto a} \\ & f_i(x, \mathbb{E}[\omega]) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8.2)$$

Si $\theta(X) = \mathbb{E}[X]$ y f_0 es una función convexa, la desigualdad de Jensen [76], afirma que $\mathbb{E}[f_0(x, \omega)] \geq f_0(x, \mathbb{E}[\omega])$, por lo tanto el óptimo de (8.2) es una cota inferior del valor medio del óptimo de (8.1). Esto tiene una lectura directa si f_0 es una función beneficio: si la solución del problema de programación lineal equivalente certero arroja un valor óptimo del beneficio positivo, es que éste lo será, en promedio. Naturalmente, la condición crítica, no siempre satisfecha, es la convexidad de f_0 . En cualquier caso, es evidente que buenas propiedades de θ (cierre, convexidad, linealidad...) facilitan el estudio del problema.

Como ejemplo considérense A y B variables aleatorias y el problema de minimizar $\mathbb{E}[(Ax - B)^2]$. Cálculos sencillos llevan a que el mínimo de la función se alcanza para $x = \frac{\mathbb{E}[AB]}{\mathbb{E}[A^2]}$ y el valor del mínimo es $\mathbb{E}[B^2] - \frac{\mathbb{E}[AB]^2}{\mathbb{E}[A^2]}$. Por último, la resolución del problema equivalente certero se halla considerando $a = \mathbb{E}[A]$ y $b = \mathbb{E}[B]$ en el problema determinista de minimización de la función $f(x) = (ax - b)^2$ cuya solución trivial es $x = \frac{b}{a}$. Por lo tanto $\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[A]}$ es la solución para el problema óptimo equivalente. En definitiva:

- El problema determinista arroja $x = \frac{b}{a}$. El valor mínimo es $m = 0$ luego $\min \mathbb{E}[(Ax - B)^2]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- El problema equivalente certero tiene un mínimo en $x = \frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[A]}$ y además dicho mínimo vale $\mathbb{E}[(Ax - B)^2] = \mathbb{E}[A^2] \left(\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[A]} \right)^2 + \mathbb{E}[B^2] - 2\mathbb{E}[AB] \left(\frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[A]} \right)$.
- El problema estocástico tiene un mínimo en $x = \frac{\mathbb{E}[AB]}{\mathbb{E}[A^2]}$ y además dicho mínimo vale $\mathbb{E}[(Ax - B)^2] = \mathbb{E}[B^2] - 2 \frac{\mathbb{E}[AB]^2}{\mathbb{E}[A^2]}$.

Para ilustrar este problema se consideran $A \sim \mathcal{N}(4, 1)$ y $B \sim \mathcal{N}(4, 2)$. En la Figura 8.1 puede verse una muestra de ambas variables, resaltando el valor de la media μ y los valores $\mu \pm \sigma$ para cada una de ellas. En la Figura 8.2 pueden verse los valores de la variable $Y = (Ax - B)^2$ asociados a diferentes valores de x obtenidos a partir de dicha muestra. Se han dibujado los valores medios $\mathbb{E}[Y]$ y los percentiles de 5 % y 95 %. Se observa que $m = 0 \leq \mathbb{E}[Y]$ independientemente del valor de x (en este caso, al ser $Y \geq 0$ por definición, esto no da mucha información). Finalmente, la Figura 8.3 muestra los histogramas de las muestras de Y en el óptimo asociado al problema certero equivalente y al problema estocástico.

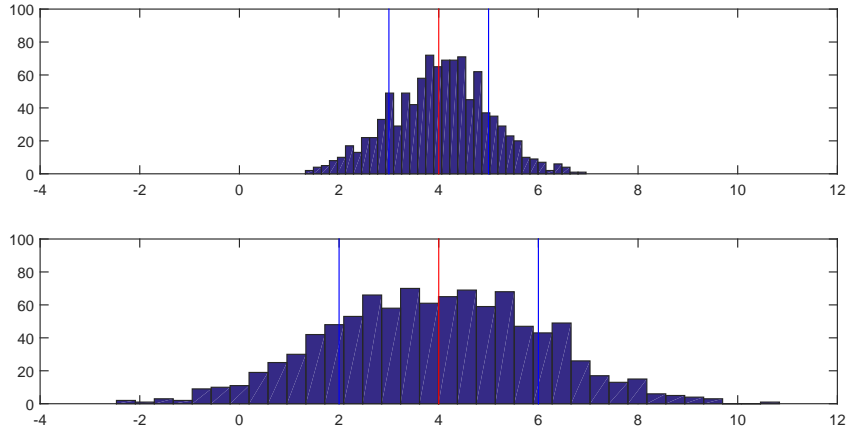


Figura 8.1 Histogramas de las variables A y B .

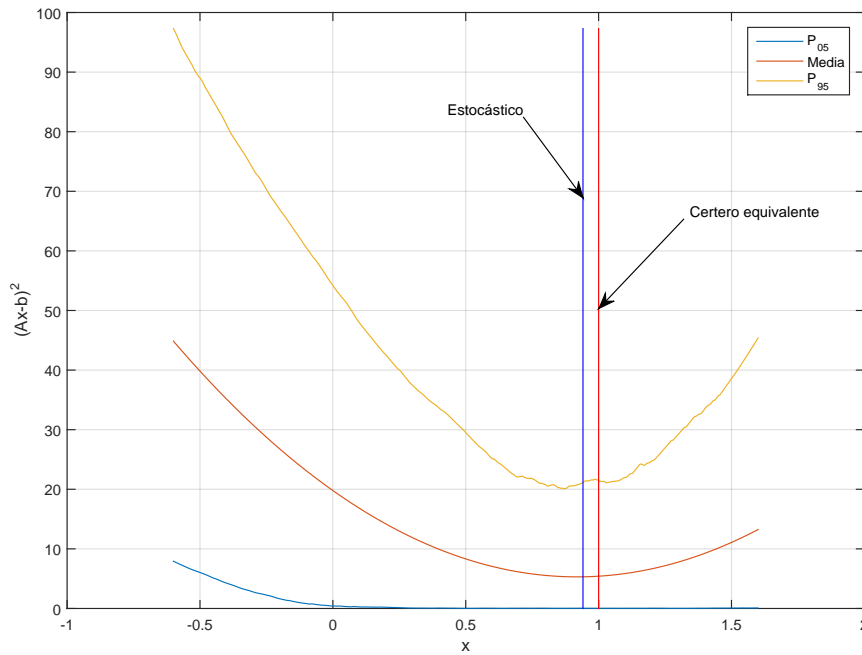


Figura 8.2 Media y percentiles 5 y 95 de la variable Y como función de x .

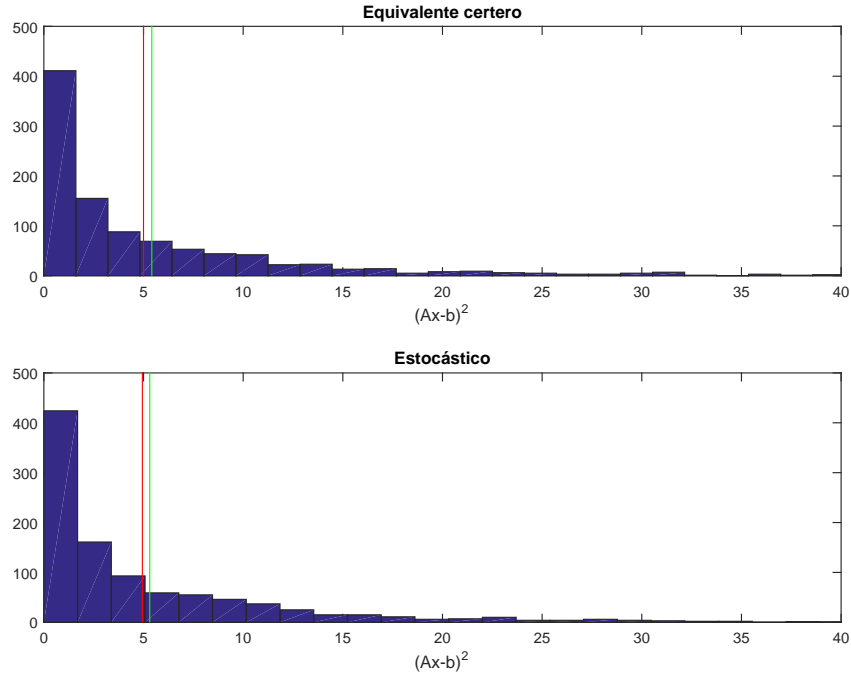


Figura 8.3 Histogramas de Y junto a sus medias (valor analítico en rojo y media muestral en verde).

8.2.2 Análisis de escenarios

En algunos casos el soporte de la variable aleatoria es un conjunto finito de valores, llamados **escenarios**. Esto pasa si la variable aleatoria sigue una ley *Bernoulli*, por ejemplo, o en general $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ con $\pi_j = \Pr[\omega = \omega_j]$. De nuevo, tomando $\theta(X) = \mathbb{E}[X]$, como $\mathbb{E}[f_0(x, \omega)] = \sum_{j=1}^N \pi_j f_0(x, \omega_j)$ y $\Pr[f_i(x, \omega) \leq 0] = \sum_{\{j|f_i(x, \omega_j) \leq 0\}} \pi_j$ el problema (8.1) queda:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in V} \sum_{j=1}^N \pi_j f_0(x, \omega_j) \\ & \text{sujeto a} \\ & \sum_{\{j|f_i(x, \omega_j) \leq 0\}} \pi_j \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Obsérvese que el problema así definido es un problema de programación matemática determinista. Las propiedades de las funciones f_0 y f_i , $i = 1, \dots, m$ serán las que definan la complejidad del mismo: si las funciones son lineales, se tratará de un problema de programación lineal, que podrá resolverse mediante técnicas rápidas y sencillas como el algoritmo simplex, para funciones convexas, se usan las técnicas propias de la optimización convexa y así para cada uno de los tipos de problema. La complejidad computacional del problema crece linealmente con el número de escenarios N .

Cabe señalar algo fundamental. Cualquier problema de programación estocástica, tratado numéricamente, puede ser visto como un problema de escenarios utilizando la técnica de *bootstrapping*, introducida en el Capítulo 3. En efecto, si se considera la distribución empírica conjunta \hat{F}_ω obtenida a partir de las muestras de datos, puede discretizarse el conjunto de valores que puede adoptar la variable ω puede discretizarse y mediante remuestreo, aproximar las probabilidades de cada uno de los eventos.

En la última sección de este capítulo se verá como, gracias al uso del concepto de catálogo y al cálculo de probabilidades (Métodos de Nivel III) mediante técnicas de tipo Montecarlo, se puede resolver el problema de programación estocástica como si se tratase de un problema de escenarios en el que se contemplan tantos escenarios diferentes como como muestras quieran obtenerse, de cara al cálculo de las probabilidades necesarias para comprobar la factibilidad de un punto y el valor de la función objetivo.

8.3 El método de Montecarlo aplicado al cálculo de probabilidades

El objetivo de este apartado es poner en perspectiva el uso de las técnicas de Montecarlo para el cálculo de probabilidades con la fase de diseño y la fase de análisis del problema de optimización que se pretende resolver. En él se harán uso de las notaciones y variables definidas en el Capítulo 7, Sección 7.2

Antes de nada es importante señalar que el método de Montecarlo permite, simultáneamente dos tipos de cálculos:

1. **Cálculo de probabilidades:** Mediante la aproximación de la integral, como ya se ha comentado. Estas probabilidades pueden ser a su vez
 - a) **Restricciones del problema de optimización:** Calculadas en la fase de **diseño**. Permiten comprobar si los puntos de diseño del problema considerados son o no factibles, es decir, si cumplen o no con las restricciones.
 - b) **Análisis de la función objetivo:** Calculadas en la fase de **análisis**. Pueden estudiarse valores relevantes como la probabilidad de pérdidas p_L , la fiabilidad respecto a otra inversión de referencia $f...$
 - c) **Análisis del rendimiento:** Calculadas en la fase de **análisis**. Permiten estudiar el rendimiento del sistema, en términos de la fiabilidad de cada KPI f_i y la fiabilidad total F .
2. **Cálculo de parámetros estadísticos:** Mediante cálculo directo. A partir de cada una de las realizaciones generadas de las variables de entrada, se obtiene, gracias al modelo, una realización correspondiente de las variables de salida. A partir de ahí puede hacerse estadística, es decir, inferir de los datos muestrales los parámetros poblacionales que se pretendan calcular¹. De nuevo este cálculo se hace en las dos fases
 - a) **Función objetivo:** Calculados en la fase de **diseño**. Permite comparar entre puntos factibles, de cara a escoger un óptimo.
 - b) **Análisis de la función objetivo:** Calculados en la fase de **análisis**. Estos parámetros incluyen el beneficio medio \bar{p} , el riesgo cuadrático medio r , el valor en riesgo al nivel q , VaR_q , el índice de fiabilidad respecto a otra inversión $\beta...$
 - c) **Análisis del rendimiento:** Calculados en la fase de **análisis**. Estos parámetros incluyen el índice de fiabilidad de cada KPI, β_i o el índice de fiabilidad total B .
 - d) **Análisis económicos:** Calculados en la fase de **análisis**. Aquí se incluye el ratio de Sharpe SR, la Tasa Interna de Rentabilidad (TIR) media $\bar{i}_r = \mathbb{E}[i_R]$ o el Valor Actualizado Neto (VAN) medio $\bar{\text{VAN}} = \mathbb{E}[\text{VAN}]$.

Además de todo esto, pueden utilizarse herramientas gráficas (histogramas, diagramas en caja, función de distribución empírica...) para ilustrar la variabilidad de todos los indicadores de rendimiento que se deseen analizar.

8.3.1 Error en el Método de Montecarlo. Tamaño de la muestra

Establecido que el procedimiento que se va a utilizar para el cálculo de las probabilidades de fallo y los parámetros estadísticos es el método de Montecarlo, hay que hacerse preguntas como cual es el mínimo tamaño muestral necesario para que las probabilidades se estimen con suficiente exactitud.

Es importante señalar que en la fase de diseño puede no ser necesario calcular la probabilidad de que no se cumpla cierta restricción con exactitud, basta ver que dicha probabilidad es menor a la establecida en la restricción. En la fase de análisis, sí que es necesario un cálculo de la probabilidad con el error requerido.

Por otra parte, el cálculo preciso de la función objetivo no es tan importante en la fase de diseño, puesto que lo que realmente es importante es la comparación de dicha función objetivo para diferentes puntos posibles de diseño. Análogamente al caso de las probabilidades, en la fase de análisis, la estimación de cualquier

¹ Al respecto se ha de señalar que en un trabajo completamente riguroso, habría que estudiar las propiedades estadísticas de estos estimadores: consistencia, sesgo, eficiencia, normalidad asintótica... esto, no obstante, queda fuera del ámbito de este trabajo, que pretende ser ilustrador

parámetro sí que debe hacerse de forma que se garantice que el valor de dicho parámetro converge cuando $M \rightarrow \infty$. Esta propiedad (consistencia estadística) se comprobará numéricamente, siendo el análisis riguroso estadístico, en general, muy complejo.

Cálculo de probabilidades

Sea ε el error admisible en la estimación de una determinada probabilidad y $\alpha \in [0; 1]$ un nivel de significación. Se pretende que, llamando \hat{p} a la probabilidad estimada y p a la probabilidad real:

$$\Pr[|\hat{p} - p| \leq \varepsilon] = 1 - \alpha \quad (8.3)$$

Por definición $\hat{p} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_i$ donde $Y_i = 1$ si $G(X_1, \dots, X_n) \leq 0$ y $Y_i = 0$ si $G(X_1, \dots, X_n) > 0$. Así $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$ (una distribución *Bernouilli* de parámetro p). Es sabido que $\mathbb{E}[Y_i] = p$ y $\sigma^2(Y_i) = p(1-p)$ luego $\mathbb{E}[\hat{p}] = p$ y $\sigma(\hat{p}) = \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$. De acuerdo con el Teorema Central del Límite [76], se verifica que, si M es suficientemente grande, $\frac{\hat{p}-p}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ por lo tanto puede realizarse la aproximación $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{\sigma}{\sqrt{M}}\right)$. Por consiguiente, la Ecuación (8.3) queda

$$2\Phi\left(\varepsilon \left(\frac{pM}{1-p}\right)^{1/2}\right) - 1 = 1 - \alpha \quad (8.4)$$

Por lo tanto, si $z_{\alpha/2}$ denota el cuantil de la normal estándar asociado a un nivel de significación α se tiene

$$M = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1-p}{p} \quad (8.5)$$

Del mismo modo, puede calcularse la probabilidad de que la probabilidad estimada \hat{p} se mayor a un umbral u : $\tau = \Pr[\hat{p} - u \geq 0] = \Pr\left[\frac{(\hat{p}-u)-(\mathbb{E}[\hat{p}]-u)}{\sigma(\hat{p})} \geq -\frac{\mathbb{E}[\hat{p}]-u}{\sigma(\hat{p})}\right]$. Recordando de nuevo que $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{M}}\right)$ se obtiene $\frac{(\hat{p}-u)-(\mathbb{E}[\hat{p}]-u)}{\sigma(\hat{p})} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y por ello

$$\tau = 1 - \Phi\left(-\frac{p-u}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}}\right) \quad (8.6)$$

Si se desea que $\tau \geq \alpha$ se tiene, denotando mediante z_{α} al cuantil de la normal estándar asociado a un nivel de significación α :

$$\tau = 1 - \Phi\left(-\frac{p-u}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}}\right) \quad (8.7)$$

Fase de diseño

En la fase de diseño, el cálculo de probabilidades no tiene que ser muy exacto. Basta con asegurarse, con un cierto nivel de significación, que la probabilidad estimada no supera el umbral dado por la restricción. Se recuerda que, Así, fijado un nivel de significación α , el proceso de cálculo de las probabilidades durante la fase de diseño es:

Algoritmo de cálculo de probabilidades en la fase de optimización (A1)

1. Se define un valor del tamaño de la muestra inicial $M = M_0$.
2. Cálculo de π_j por el método de Montecarlo, para $j = 1, \dots, l$.
3. Cálculo de $\tau_j = 1 - \Phi\left(-\frac{\pi_j - \alpha_j}{\sqrt{\frac{\pi_j(1-\pi_j)}{M}}}\right)$.
4. Mientras para algún j , $\tau_j > \alpha$.
 - a) Calcular $\delta = \min_j \{\pi_j - \alpha_j\}$ y $p = \pi_j$ para el valor j donde se alcanza el mínimo.
 - b) Actualización de M : $M = \left(\frac{z_\alpha}{\delta}\right)^2 p(1-p)$.
 - c) Actualización de π_j : Cálculo de π_j mediante el método de Montecarlo, para $j = 1, \dots, l$.
 - d) Actualización de τ_j : $\tau_j := 1 - \Phi\left(-\frac{\pi_j - \alpha_j}{\sqrt{\frac{\pi_j(1-\pi_j)}{M}}}\right)$.
5. Salida del programa: π_j .

Fase de análisis

En esta fase, se pretende obtener las probabilidades con precisión. El tamaño de la muestra necesaria para que la probabilidad estimada esté a una distancia a lo sumo ε de su valor real depende del valor de la probabilidad, como se vio en la Ecuación (8.5). El proceso más habitual de cálculo de la probabilidad con una tolerancia TOL y un error ε a un nivel de significación α es pues el siguiente:

Algoritmo de cálculo de probabilidades en la fase de análisis (A2)

1. Se define un valor del tamaño de la muestra inicial $M = M_0$, $p_o = 0$.
2. Cálculo de p_n mediante el método de Montecarlo.
3. Cálculo $\delta = |p_n - p_o|$.
4. Mientras $\delta > \text{TOL}$, hacer
 - a) Actualización de M : $M := \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1-p_n}{p}$.
 - b) Actualización de p_n y p_o : $p_o := p_n$. Cálculo del nuevo p_n mediante el método de Montecarlo.
 - c) Actualización de δ : $\delta := |p_n - p_o|$.
5. Salida del programa: p_n .

Es importante señalar que, de acuerdo con la Ecuación (8.5), es muy costoso estimar probabilidades pequeñas. Para lidiar con este tipo de problemas véase [7]. En este trabajo, no obstante, de ámbito académico, no se implementarán mejoras en los métodos de Montecarlo utilizados que incluyan reducción de la varianza mediante estimadores antitéticos, el método de Metropolis - Hastings, métodos de quasi-Montecarlo o el basado en cadenas de Markov. El ámbito de este trabajo pretende ser ilustrativo.

Cálculo de parámetros

El cálculo de parámetros no es tan crítico como el cálculo de probabilidades, puesto que lo que se pretende con ellos es obtener una información estadística de las variables aleatorias. Ya se ha visto que, en la fase de diseño, no es necesario un cálculo muy exacto de la función objetivo, puesto que ésta sirve simplemente para discriminar puntos factibles.

En la fase de análisis, no obstante, puede ser útil interesarse por algunos aspectos estadísticos de los estimadores de parámetros, a saber: el sesgo, el error estándar, la convergencia y la consistencia. Sea $\theta(X)$ un parámetro que se desea estimar de una variable aleatoria X a partir de una muestra de tamaño m (aquí ya no tiene por qué ser el espíritu del problema, puede ser cualquier parámetro de cualquier KPI) y sea $\hat{\theta}$ un estadístico que pretende estimar θ . Se definen

- **Sesgo:** El sesgo de un estimador es el valor $B_{\hat{\theta}} = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$.
- **Error estándar:** El error estándar de un estimador es $SE_{\hat{\theta}} = \sigma(\hat{\theta})$.

- **Convergencia:** El estimador $\hat{\theta}$ se dice convergente² si $\exists \theta_0$ tal que $(\hat{\theta}) \rightarrow \theta_0$ si $m \rightarrow \infty$.
- **Consistencia:** El estimador $\hat{\theta}$ es convergente y además $\theta_0 = \theta$.

Obsérvese que si el estimador es insesgado $\Pr[|\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]| \geq a] = \Pr[|\hat{\theta} - \theta| \geq a]$ y de acuerdo con la desigualdad de Chebychev [69], $\Pr[|\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]| \geq a] \leq \frac{V(\hat{\theta})}{a^2} = \left(\frac{SE_{\hat{\theta}}}{a}\right)^2$, y por lo tanto, si un estimador es insesgado y su error estándar tiende a cero para muestras cada vez más grandes, entonces es consistente.

Como ya se ha dicho, un estudio riguroso de estas propiedades es, en el caso general, complejo. No obstante, a continuación se presentan dos técnicas estadísticas numéricas para evaluar el sesgo y el error estándar del estimador θ . Estos conceptos se desarrollan en [35].

Jackknife. Se trata de una técnica ideada por Maurice Quenouille a finales de los 50 y la década de los 60 y perfeccionada por John W. Tukey, quien la denominó así por su carácter general. El principio consiste en, dada una muestra de observaciones de tamaño m , suprimir cada vez un conjunto de observaciones g y calcular sobre el conjunto restante de datos el estadístico de interés. En general se toma $g = 1$, por lo tanto, a partir de una muestra de tamaño m , se crean m muestras de tamaño $m - 1$.

A partir de estas muestras, puede realizarse una estimación del sesgo y del error estándar del estimador.

Sea X_1, \dots, X_m un conjunto de m variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ basado en la muestra de tamaño m y sea $\hat{\theta}_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ el mismo estimador en el que se ha extraído el dato i -ésimo. Se define el **estimador jackknife** de θ como

$$\bar{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{(i)}$$

Estimación del sesgo:

Obsérvese que si $\hat{\theta}$ es insesgado $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$, entonces $\mathbb{E}[\bar{\theta}] = \theta$. No obstante, si $\mathbb{E}[\hat{\theta}_0] = \theta + an^{-1} + bn^{-2} + O(n^{-3})$, cálculos directos permiten obtener que $\mathbb{E}[\bar{\theta}] = \mathbb{E}[\hat{\theta}] + \frac{a}{n(n-1)} + O(n^{-3})$, por lo tanto un estimador del sesgo $B_{\hat{\theta}}$ hasta segundo orden es

$$\hat{B}_{JK} = (n-1)(\bar{\theta} - \hat{\theta})$$

Estimación del error estándar:

Se define el pseudovalor asociado al valor i -ésimo $\hat{\theta}_i^* = m\bar{\theta} - (m-1)\hat{\theta}_{(i)}$. Obsérvese que $\hat{\theta}_i^* = \hat{\theta} + (m-1)(\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(i)})$ por lo tanto $\hat{\theta}_i^*$ puede ser visto como una corrección de sesgo del valor $\hat{\theta}$ basada en la tendencia en los estimadores al añadir el dato i -ésimo a una muestra que no lo tenía. La idea ahora es tratar a los valores de $\hat{\theta}_i^*$, $i = 1, \dots, m$ como si fueran variables aleatorias independientes cuya media es θ , por lo tanto un estimador del error estándar $SE_{\hat{\theta}}$ se obtiene calculando la raíz cuadrada de la cuasi - varianza muestral de esta muestra, que finalmente queda

$$\hat{SE}_{JK} = \sqrt{\frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta})^2}$$

Intervalo de confianza:

A partir de los dos resultados anteriores es fácil ver que un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ de θ es

$$I = [\bar{\theta} - z_{\alpha/2} \hat{SE}_{JK}; \bar{\theta} + z_{\alpha/2} \hat{SE}_{JK}]$$

En resumen, el algoritmo para estimación de parámetros mediante *jackknife* para una muestra de tamaño m $X = (X_1, \dots, X_m)$ es:

² Obsérvese que $\hat{\theta}$ es una variable aleatoria y la convergencia debe interpretarse como una convergencia en probabilidad, es decir $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr[|\hat{\theta} - \theta_0| \geq \varepsilon] = 0$

Algoritmo de estimación de parámetros mediante *jackknife* (A3)

1. Definición del estadístico de interés θ .
2. Calcular el estadístico para la muestra original: $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$.
3. Para $i = 1$ hasta $i = m$, hacer
 - a) Quitar de X el elemento i : $X = [X] \setminus \{X_i\}$.
 - b) Calcular el estadístico para la nueva muestra: $\hat{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(X)$
4. Calcular la media de las estimaciones: $\bar{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{(i)}$.
5. Estimación del parámetro mediante *jackknife*: $\hat{\theta}^* = m\hat{\theta} - (m-1)\bar{\theta}$.
6. Calcular la estimación del sesgo:

$$\hat{B}_{JK} = (n-1)(\bar{\theta} - \hat{\theta})$$
7. Calcular la estimación del error estándar: $\hat{SE}_{JK} = \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^m (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta})^2}$.

Bootstrap. Esta técnica de computación estadística intensiva se desarrolló a finales de los años ochenta con la mejora de las capacidades computacionales de los ordenadores. Su significado, como se especificó en el Capítulo 3 significa que es autosuficiente y, en realidad, puede interpretarse como una versión no lineal del método *jackknife*. La idea, que ya se expuso en el capítulo anterior, está basada en el concepto de remuestreo a partir de una muestra X_1, \dots, X_m . El fundamento teórico del método es que la función de distribución empírica de los datos \hat{F} obtenida a partir de una muestra de tamaño m suponiendo todos los datos de la muestra equiprobables es una buena estimación de F para todo punto. A partir del teorema de Glivenko - Cantelli, se demuestra [13] que \hat{F} estima F de forma casi segura en el límite.

Así, el algoritmo general de la estimación *bootstrap* no paramétrica se basa en la extracción aleatoria y con reposición de un conjunto de muestras X_1^b, \dots, X_m^b de la muestra original X_1, \dots, X_m , con $b = 1, \dots, B$. Para cada una de estas muestras, se calcula el valor del estadístico $\hat{\theta}_b$ del mismo modo que se calcularía el estadístico $\hat{\theta}$ para la muestra original. Además se define:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b$$

Estimación del sesgo:

El sesgo de un estimador mediante *bootstrapping* se obtiene [33], [34] haciendo

$$\hat{B}_B = \bar{\theta} - \hat{\theta}$$

Estimación del error estándar:

Análogamente, la estimación del error estándar [33], [34] es

$$\hat{SE}_B = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b - \bar{\theta})^2}$$

Intervalos de confianza:

A partir de los dos resultados anteriores es fácil ver que un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ de θ es

$$I = [\bar{\theta}^* - z_{\alpha/2} \hat{SE}_B; \bar{\theta}^* + z_{\alpha/2} \hat{SE}_B]$$

En resumen, el algoritmo para estimación de parámetros mediante *bootstrapping* para una muestra de tamaño m $X = (X_1, \dots, X_m)$ es:

Algoritmo de estimación de parámetros mediante *bootstrapping* (A4)

1. Definición del estadístico de interés θ .
2. Calcular el estadístico para la muestra original: $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$.
3. Fijar el número de remuestras B a realizar.
4. Para $b = 1$ hasta $b = B$, hacer
 - a) hacer $X = [\]$.
 - b) Para $j = 1$ hasta $j = m$, hacer
 - I. Generar un número aleatorio n de 1 a m .
 - II. Añadir X_n a la muestra: $X = [X; X_n]$.
 - c) Calcular el estadístico para la muestra de remuestreo: $\hat{\theta}_b = \hat{\theta}(X)$.
5. Calcular la estimación *bootstrap*: $\bar{\theta} = \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b$
6. Calcular la estimación del sesgo: $\hat{B}_B = \bar{\theta} - \hat{\theta}$
7. Calcular la estimación del error estándar: $\hat{SE}_B = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b - \bar{\theta})^2}$

8.3.2 Algoritmo de resolución del método de optimización

En esta última sección se presentará el algoritmo de optimización que se seguirá para resolver el problema de optimización. Para el esquema escogido, es fundamental el concepto de catálogo C definido en el Capítulo 7. El catálogo permite convertir un problema de optimización estocástica continuo en un problema de optimización determinista discreto. La justificación se basa en los dos puntos siguientes:

- En el Capítulo anterior se vio que a lo sumo, se verifica $\text{card}(C) = N^r$ con $N = \max_i \{N_i\}$, siendo N_i el número de puntos de discretización de la variable m_i , $i = 1, \dots, r$. Al hacer $\mathbf{m} \in C$, se reduce el problema continuo a la evaluación de a lo sumo N^r puntos. El que tenga una función objetivo mayor, será el óptimo \mathbf{m}^* .
- Como en cada punto de evaluación \mathbf{m} está fijo, las probabilidades π_j y la función objetivo θ pueden estimarse mediante estimadores $\hat{\pi}_j$ y $\hat{\theta}$ mediante técnicas de tipo Montecarlo, tal y como se ha descrito en dicho apartado. Esto, en esencia, no es más que convertir el problema de programación estocástica en un problema determinista equivalente de escenarios, donde cada escenario es una realización de las variables aleatorias que intervienen en los cálculos de la función objetivo y las probabilidades de las restricciones.

La mayor ventaja de este método es que es **trivialmente paralelizable**: Sea $C_u = A$ el coste (computacional o en tiempo) de una simulación del sistema en un horizonte T . Mediante el método de Montecarlo, para cada punto, se requieren M realizaciones (si M es suficientemente grande para que en todos los casos las probabilidades converjan). Así, el coste máximo para la resolución del problema es $M \times N^r \times A$. Este coste puede ser enorme, por lo que habrá que intentar cuidar lo máximo posible la elección del catálogo. Sin embargo, el aspecto positivo es que si se poseen K núcleos de cálculo, el coste escala linealmente de forma que es $C_T = \frac{M \times N^r \times A}{K}$. Por ejemplo, si una simulación dura $A = 5$ min, se pretenden optimizar $r = 3$ parámetros cuyo parámetro con más opciones de evaluación tiene $N = 5$, se requieren $M = 1000$ simulaciones para que el método de Montecarlo converja razonablemente y se dispone de $K = 20$ núcleos de cálculo, el coste computacional de la optimización será:

$$C_T = 62500 \text{ min} = 21 \text{ d}$$

Como se ha aventurado, el coste es importante, pero los resultados (la elección del mejor candidato y la posibilidad de analizar el sistema en toda su magnitud) pueden merecer la pena.

El algoritmo de resolución del problema de programación estocástica basado en el catálogo es:

Algoritmo de optimización (A5)

1. Definir $A = []$ cola estándar. $B = []$ cola de prioridades.
 2. $\forall \mathbf{m} \in C$, hacer
 - a) Generar M muestras de las solicitudes externas $[\mathbf{f}^k(t)]_{t \in [0;T]}$, $k = 1, \dots, M$. En realidad serán $[\mathbf{f}_i^k]_{i=1, \dots, n}$, con $f_i^k = f^k(t_i)$ debido a la discretización.
 - b) Cálculo de las probabilidades de las restricciones mediante el método de Montecarlo (Ver **Algoritmo A1**).

$$\pi_j = \Pr[G_j(\mathbf{m}; [\mathbf{F}]) \leq 0] \simeq \hat{\pi}_j = \frac{\text{card}\{G_j(\mathbf{m}, [\mathbf{f}^k]) \leq 0, k = 1, \dots, M\}}{M}, \quad j = 1, \dots, l$$
 - Si $\exists j$ tal que $\pi_j > \alpha_j$, desechar el valor de \mathbf{m} .
 - Si $\forall j, \pi_j \leq \alpha_j$.
 - I. Cálculo de la función objetivo mediante estimación estadística:

$$F = \theta(P(\mathbf{m}; [\mathbf{F}])) \simeq \hat{F} = \hat{\theta}(P(\mathbf{m}; [\mathbf{f}^k]))$$

Guardar el valor en F en la cola de prioridades B : $B = [B; \hat{F}]$.

 - II. Guardar el valor de \mathbf{m} en la cola A en el mismo orden: $A = [A; \mathbf{m}]$.
3. Extraer el último elemento de A .

9 Optimización de una estructura soporte de paneles fotovoltaicos

No todo término merece el nombre de fin, sino tan sólo el que es óptimo..

ARISTÓTELES, 384 A.C. - 322 A.C.

Es momento de ejemplificar, para un caso sencillo y abordable, toda la metodología descrita a lo largo de este trabajo. Para que el problema resuelto sea ilustrador, se ha procurado que en él se vean reflejadas las características genuinas de todo lo que se ha venido desarrollando:

- Las variables de entrada ambientales, cuyo agente fundamental es meteorológico, la velocidad del viento, responden al **modelo probabilístico C - V** presentado en la Parte I. Se trata, como es lógico, de las fuerzas sobre ciertos elementos (nodos) de la estructura.
- El sistema mecánico en sí es una estructura, cuyo cálculo se realiza en régimen *cuasi - estático* y considerando todos los posibles fallos estructurales posibles mediante las ecuaciones de verificación a lo largo de la vida útil del sistema. Así, se trata de un **sistema mecánico con memoria** tal y como se desarrolló en la Parte II.
- El objetivo del problema es **maximizar el rendimiento del sistema**, definido en términos económicos, es decir el beneficio industrial, garantizando que cumpla con determinadas especificaciones técnicas, que jugarán el papel de restricciones, tal y como se explicó en los primeros capítulos de la Parte III. Para ello, habrá que definir funciones de ingresos y costes por unidad de tiempo asociados a la estructura, dependientes de las cargas y el estado mecánico, de forma que se pueda calcular el beneficio.

Como se ha comentado, el principal inconveniente del enfoque utilizado es el coste computacional. Debido a las limitadas capacidades computacionales de un ordenador personal, se ha presentado un ejemplo sencillo basado en una estructura de barras articuladas de soporte de unos paneles fotovoltaicos, presentada en el Capítulo 1.

9.1 Descripción del caso de análisis

9.1.1 Descripción del sistema y parámetros

Se pretende estudiar una planta fotovoltaica de generación de energía eléctrica. La planta está formada por una serie de estructuras soporte de las placas, todas idénticas, situadas de forma repetitiva, isótropa y homogénea sobre un terreno a la intemperie. El número de estructuras es muy grande y además, se supone que están suficientemente espaciadas, de forma que el efecto de las variables ambientales puede suponerse idéntico en todas ellas: el sistema es idéntico en sus variables intrínsecas o parámetros **m** y en sus variables extrínsecas o ambientales **f**. En consecuencia, se pueden suponer las hipótesis del Capítulo 1, a saber

Tabla 9.1 Coordenadas de los nodos.

Nodo	Coordenada X [m]	Coordenada Y [m]
1	1.3470	0.0000
2	2.6940	0.0000
3	0.0000	0.9787
4	1.3470	0.9787
5	2.6940	0.9787
6	0.6735	1.4680
7	1.3470	1.9573
8	2.0205	2.4467
9	3.3675	2.4467
10	2.6940	2.9360
11	3.3675	3.4253
12	4.0410	3.9146

1. Todas las estructuras son idénticas.
2. Las estructuras se repiten un número grande de veces.

Los agentes ambientales, en este caso el viento, son transformados en cargas sobre la estructura. El modelo estructural es el de una estructura de barras articuladas, por lo que las variables ambientales del modelo serán las cargas nodales, tal y como puede verse en la Figura 9.1. El paso de las cargas de viento a cargas nodales se explicó en el Capítulo 1, en esta fase del trabajo, las cargas son simplemente 14 series temporales que representan las fuerzas a lo largo de la vida útil de la estructura.

En cuanto a la estructura, la Figura 9.1 muestra una posible topología. Otras diferentes, variaciones de la mostrada, pueden obtenerse añadiendo barras que conecten nodos, lo que aumentará el grado de hiperestaticidad de la estructura. En la Tabla 9.1 se muestran las coordenadas en el plano de todos los nodos de la estructura, de acuerdo con el esquema presentado en la Figura 9.1.

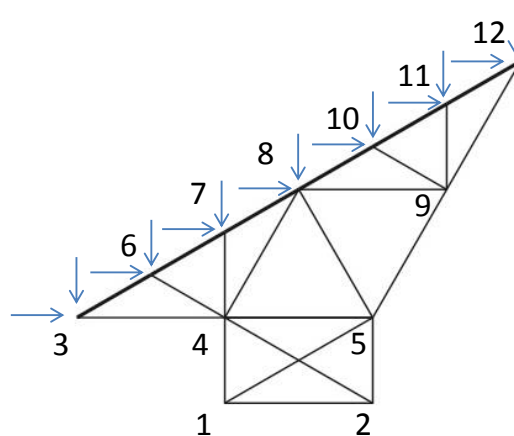


Figura 9.1 Esquema del modelo y las variables ambientales.

Para cada una de las barras, se han de especificar los parámetros que intervienen en el modelo, que son

- **Parámetros geométricos:** Son los parámetros que definen la geometría del sistema
 - Conectividad entre los nodos. Es una variable binaria C_{ij} que vale 1 o 0 en función de si los nodos i y j están conectados por un elemento (1) o no (0).
- **Parámetros mecánicos:** Dichos parámetros tienen que ver con el comportamiento del material y el tipo de elemento utilizado (en este caso elemento barra articulada), tal y como se estudió en el Capítulo 5 y con sus propiedades resistentes, tal y como se vio en el Capítulo 6

- Área de la sección, denotada mediante A .
- Módulo de elasticidad longitudinal, denotado mediante E .
- Momento de inercia, denotado mediante I .
- Límite elástico del material, denotado mediante σ .
- **Parámetros económicos/rendimiento:** Son los parámetros que definen los costes de la estructura, tanto iniciales, como a lo largo del tiempo. En este caso
 - Coste de cada elemento, denotado mediante c_I .
 - Coste por unidad de tiempo de mantenimiento de cada elemento, denotado mediante c_M .
 - Costes fijos de construcción, no ligados al número de barras, denotados mediante K .
 - Productividad de cada nodo. Se considera que mientras no colapsen los nodos que soportan las celdas fotovoltaicas (nodos 3, 6, 7, 8, 10, 11 y 12), cada nodo genera una potencia media constante P .
- **Parámetros de operación:** Parámetros que condicionan la operación del sistema, en particular las tareas de mantenimiento.
 - Tiempo entre reparaciones, denotado mediante τ .

Se pretende analizar la estructura en un horizonte temporal de $T = 1$ año, que es el tiempo para el cual se ha diseñado.

9.1.2 Variables ambientales

Ya se han presentado las variables ambientales relacionadas con los agentes meteorológicos: las series temporales de las 14 fuerzas nodales. No obstante, en este problema, hay una variable ambiental más cuyo origen es el hecho de pasar del problema estructural al problema económico global. Se trata del precio de la energía o **precio de casación**. Es el precio por el que se vende la energía producida por una planta, que depende del mercado eléctrico.

En definitiva, las variables ambientales del problema son

- El vector de fuerzas sobre los nodos \mathbf{F} .
- El precio de casación del mercado eléctrico D .

9.2 Problema de optimización

9.2.1 Objetivos y motivación

El objetivo del estudio es diseñar un sistema óptimo de entre varios candidatos, presentados bajo la forma de catálogo y analizar el rendimiento del mismo desde el punto de vista probabilista, de cara a tener un conocimiento integral del riesgo del sistema.

El interés de este estudio es responder a preguntas como:

- **Sección de las barras:** Secciones muy grandes aumentarán el coste estructural pero reducirán el riesgo de fallo y por consiguiente el tiempo en que la estructura no desempeñe su función de soporte de los paneles fotovoltaicos, que son los elementos productivos.
- **Grado de hiperestaticidad:** A más barras, estructuras más hiperestáticas, cuyo fallo será menos probable. No obstante, añadir barras encarece la estructura inicial, y puede que esto no tenga efectos directos sobre los nodos que producen, quizás más propensos a fallar localmente.
- **Estrategia de mantenimiento:** Reparar las estructuras, en caso de fallo, cada poco tiempo permite reducir el tiempo en que éstas no son productivas aunque cada reparación tiene un coste proporcional al número de elementos afectados por el colapso. Así, puede ser preferible no reparar nunca la estructura, o hacerlo sólo cada cierto tiempo.

Una vez diseñado el sistema, se estudiará el mismo en condiciones de incertidumbre. Dicho análisis incluye el análisis del beneficio, del rendimiento, las coberturas y la financiación.

9.2.2 Catálogo de variables de diseño

Definir el catálogo es un paso fundamental, ya que no sólo define las variables de diseño, sino que las sitúa en un marco real de posibilidades. El catálogo viene definido de la forma siguiente:

1. Se duda entre tres tipos de barras de acero ofertadas por un fabricante, todas de sección tubular, con espesor del tubo $e = 10$ mm y diferentes radios internos: $R_1 = 18$ mm, $R_2 = 19$ mm y $R_3 = 20$ mm.
2. Se plantea el problema de si la barra 1-5 es necesaria o si debería añadirse una barra 4-9: $C_{15}, C_{49} \in \{0; 1\}$
3. Se plantean tres estrategias de gestión. Reparar la estructura cada día, hacerlo cada mes o hacerlo cada medio año: $\tau_1 = 1d$, $\tau = 1$ mes, $\tau = 6$ meses año.

Formalmente $C = \{(R, C_{15}, C_{49}, \tau) | R \in \{R_1, R_2, R_3\}, C_{15}, C_{49} \in \{0; 1\}, \tau \in \{\tau_1; \tau_2; \tau_3\}\}$. De acuerdo con esto, el número de puntos candidatos en el catálogo es $N = 36$. El resto de parámetros se calculan a partir de esos parámetros como sigue;

- Las secciones de las barras son $A_i = \pi ((R_i + e)^2 - R_i^2)$, $i = 1, 2, 3$.
- El módulo de elasticidad longitudinal se supone igual al del acero y es igual para todas las barras $E = E_s$.
- El momento de inercia depende de la geometría de la barra, pero los tres tipos de barras ofertados tienen momentos de inercia respectivos $I_i = \frac{\pi}{4} ((R_i + e)^4 - R_i^4)$, $i = 1, 2, 3$.
- El límite elástico es el del acero y es igual para todas las barras $\sigma = \sigma_s$.
- El coste de cada elemento se supone proporcional a la masa de acero empleado, siendo la constante de proporcionalidad r . Considerando la densidad del acero ρ_s se obtiene $\hat{c} = r\rho_s$. De ahí, se calcula $c_{I,i} = \hat{c}LA_i$ donde A_i es la sección de la barra y L su longitud (variable dentro de la estructura, depende de la barra considerada), $i = 1, 2, 3$.
- El coste de mantenimiento se supone independiente de la barra. Se estima que el mantenimiento de cada barra (revisiones, mano de obra...) es de c_M .
- La productividad de los nodos que soportan las células fotovoltaicas es $P = P_0$, la de los nodos que no soportan las células fotovoltaicas es $P = 0$ W.

9.2.3 Función objetivo y restricciones

Función objetivo

La función objetivo es, como en muchos de estos problemas, el beneficio industrial de la planta (dado que son un número grande de estructuras repetidas, es proporcional al beneficio de una estructura tomada individualmente). Se recuerda que el beneficio depende de los parámetros del sistema pero también de toda la historia de cargas.

Para estudiar el beneficio, el procedimiento más habitual es definir la función de ingresos y la función de costes, como se hizo en el Capítulo 7. Es lo que se realizará a continuación.

Ingresos. El objetivo es relacionar los ingresos en un instante de tiempo t con las variables de entrada del problema (variables ambientales y parámetros). Se considera que los ingresos son directamente proporcionales a la energía producida en un intervalo de tiempo Δt , vía, por supuesto, el precio de casación D . Sea $N_{np}(t)$ el número de nodos de soporte de paneles fotovoltaicos no dañados en el instante t (evidentemente, este valor

depende de la historia de cargas $[\mathbf{f}(s)]_{s \leq t}$, $0 \leq N_{np} \leq 7$, que son los nodos que generan energía, entonces utilizando la notación del Capítulo 7

$$i(t) = N_{np}([\mathbf{f}(s)]_{s \leq t})PD \quad (9.1)$$

La dependencia funcional $N_{np} = N_{np}([\mathbf{f}(s)]_{s \leq t})$ sólo puede obtenerse numéricamente mediante una simulación cuasi-estática evolutiva, tal y como se precisó en el Capítulo 5, calculando la historia de la estructura.

Costes. Sea $N_b(t)$ el número de barras de la estructura en un instante t . De nuevo $N_b = N_b([\mathbf{f}(t)]_{s \leq t})$. Para calcular los costes se procede en dos fases, en primer lugar, los costes iniciales c_0 .

$$c_0 = \sum_{k=1}^{N_b(0)} c_I^k + K \quad (9.2)$$

Por otro lado, los costes de mantenimiento en un instante t son

$$c(t) = N_b([\mathbf{f}(s)]_{s \leq t})c_M + C_R([\mathbf{f}(s)]_{s \leq t})\mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}} \quad (9.3)$$

El valor de C_R es el coste de reparación en un momento dado, que sólo debe añadirse cuando $t = \tau$, de ahí la función indicadora $\mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}}$.

Beneficio. El beneficio se obtiene, de acuerdo con el Capítulo 7, Ecuación (7.7), ya expresado en forma discreta, haciendo $i_j = i(t = t_j)$ y $c_j = c(t = t_j)$, considerando un número n de intervalos de tiempo

$$p = -c_0 + \sum_{j=1}^N (i_j - c_j)(t_j - t_{j-1}) \quad (9.4)$$

No se han puesto explícitamente las relaciones funcionales para no sobrecargar las ecuaciones, pero éstas quedan claras de las fórmulas anteriores.

Restricciones

En este estudio se considerarán únicamente dos restricciones (aunque podrían especificarse tantas como se quisiera). Una es de tipo contractual y otro de tipo estratégico/económico.

La primera es que la planta por contrato tiene que tener un rendimiento mínimo, esto significa que, a lo largo de su vida útil, siempre tiene que generar una potencia mínima P_{min} . La potencia total generada en un instante t es $P_T(t) = N_{np}(t)P$ donde por supuesto $N_{np} = N_{np}([\mathbf{f}(t)]_{\tau \leq t})$. De acuerdo con esto, la primera restricción es

$$\min_{0 \leq t \leq T} \{N_{np}(t)P\} \geq P_{min} \quad (9.5)$$

La segunda restricción es de tipo presupuestario. El coste de la obra no puede exceder un valor de C_{max} . Así, se formula:

$$c_0 \leq C_{max} \quad (9.6)$$

9.2.4 Problema de optimización estocástica

Variables aleatorias del problema

Hasta ahora se ha tratado el problema desde el punto de vista determinista, para convertirlo en un problema probabilístico sólo hay que precisar cuáles serán las variables aleatorias que intervienen. En la Parte I se estudió desde el punto de vista probabilístico el vector de cargas nodales. Esto es equivalente a decir que se conoce la función de densidad conjunta del vector aleatorio $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_{14})$.

No obstante, hay una última variable aleatoria en consideración, que es el precio de casación D , que interviene en el cálculo de los ingresos en la Ecuación 9.1. Esta variable aleatoria no es estacionaria, puesto que la demanda energética sufre variaciones interdiarias debido a los ciclos noche/día y interanuales debido a las estaciones. Como el propósito de este estudio no es realizar un análisis de los mercados energéticos ni del comportamiento de variables tan complejas como el precio de casación de la energía, se considerará

que el precio es determinista, aunque fluctúa durante el día y durante el año. Por ello se ha tomado una serie temporal D^j de un año de precios de energía, disponible en INSERTAR REFERENCIA.

El espíritu del problema y los niveles de rendimiento

La última decisión que queda por tomar es el espíritu del problema. Aquí, existen dos alternativas

- Se desea adoptar una postura aversa/proclive al riesgo. En ese caso, de acuerdo con el Capítulo 7, una medida del riesgo muy adecuada es $\theta(X) = CVAR_q(X)$.
- Se desea adoptar una postura indiferente al riesgo. En ese caso, de nuevo siguiendo las directrices del Capítulo 7, una medida del riesgo natural es $\theta(X) = \mathbb{E}[X]$.

En este caso, se ha decidido adoptar una postura proclive al riesgo.

Por otra parte, se asume que el sistema puede rendir por debajo de lo esperado sólo en un 60 % de los casos a lo sumo, debido a que si ésto sucede, se debe pagar una pequeña indemnización por contrato (obsérvese que se está hablando de una potencia producida mínima en un momento puntual a lo largo de una historia, algo que no es muy dramático). Así, la probabilidad de que el sistema suministre siempre una potencia superior a P_{min} es $\alpha = 0.4$. Como los costes iniciales no son una variable aleatoria, la segunda restricción permanece inalterable.

El problema de optimización

Así las cosas, el problema de optimización queda

$$\begin{aligned} & \underset{\substack{R \in \{R_1, R_2, R_3\}, \\ C_{15}, C_{49} \in \{0,1\}, \\ \tau \in \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}}}{\text{máx } CVAR_q} \left(- \sum_{k=1}^{N_b^0(C_{15}, C_{49})} c_I^k(R) - K + \sum_{j=1}^N \left(N_{np}^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau) D^j P - N_b^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau) c_M \right) (t_j - t_{j-1}) - C_R(R, C_{15}, C_{49}, \tau) \mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}} \right) \\ & \text{sujeto a} \\ & \Pr \left[\min_{j=1, \dots, N} \{N_{np}^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau)\} \geq \frac{P_{min}}{P} \right] \geq \alpha \\ & \sum_{k=1}^{N_b^0(C_{15}, C_{49})} c_I^k(R) + K \leq C_{max} \end{aligned}$$

Recordando, por supuesto, que las fuerzas nodales intervienen implícitamente ya que $N_{np}^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau) = N_{np}^j(R, C_{15}, C_{49}, [\mathbf{f}_i]_{i=1, \dots, j})$, $N_b^j = N_b^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau, [\mathbf{f}_i]_{i=1, \dots, j})$ y $C_R^j(R, C_{15}, C_{49}, \tau)$ y que $c_I^k = \hat{c} L_k A_k$ con L_k longitud de la barra k-ésima y A_k sección de la barra k-ésima. .

Así planteado, los procesos aleatorios $N_{np}(t)$ y $N_b(t)$, que dependen de las historia de las cargas nodales \mathbf{F}_j , caracterizados por sus series temporales N_{np}^j y N_b^j , $j = 1, \dots, N$ son el núcleo del problema, junto con la serie temporal D^j , que se supone un dato del problema.

Se recuerda que el problema se resuelve resolviendo el problema determinista de escenarios que se obtiene mediante el Método de Montecarlo y una vez resuelto, se procede al análisis de los resultados en el punto óptimo.

Simplificaciones computacionales

Como ya se ha comentado, el método numérico de resolución del problema incluye la simulación de M vidas útiles del sistema, de acuerdo con el método de Montecarlo. Una vida útil, no obstante, es un volumen de datos enorme, en general. Supuesto por ejemplo un horizonte temporal de un año, para valores del coeficiente de presiones muestreados cada $f = 250 \text{ Hz}$, se necesitaría en cada una de las M simulaciones una serie temporal del orden de $N = 8 \cdot 10^9$ datos. Esto tiene dos consecuencias importantes:

1. El coste computacional de las simulaciones es muy elevado.
2. Los requerimientos de memoria RAM de la máquina también lo son.

En un contexto industrial, con máquinas preparadas para la gestión masiva de datos y muchos núcleos habilitados para el cálculo en paralelo, ya se ha comentado que esto puede solventarse. Sin embargo, con un ordenador personal este cálculo completo resulta inabordable por requerimientos de tiempo y memoria.

Con vistas a poder ejemplificar el método, se ha propuesto un *filtro* que permita la resolución del problema en unas condiciones no industriales, aunque basada en una hipótesis que habría que validar. La idea es fijar una velocidad del viento umbral, V_{th} , llamado umbral de peligro, tal que se asume que para velocidades del viento menores que ésta, la estructura no falla nunca. Esto por supuesto, no puede garantizarse más que realizando la propia simulación y comprobando el resultado, pero es de suponer que las normas de buena práctica y la experiencia, permiten definir este umbral de forma razonable, de manera que se pueda conseguir una fracción del volumen de datos, que son las que realmente se utilizarán para el cálculo de la respuesta estructural durante una vida útil.

Obsérvese que esto, aunque reduce el tiempo de cálculo, complica un poco el problema, ya que los datos dejan de estar muestreados con el mismo periodo, por un lado, y además ha de hacerse con cuidado porque se recuerda que el modelo estadístico C - V (ver Capítulo 6 y Capítulo 3) es un modelo multiescala: la velocidad del viento se simula en periodos de $T = 10\text{min}$ mientras que el coeficiente de presiones se simula en periodos de $\Delta t = 0.0046\text{s}$. Por ello, localizados los instantes t_i^* en los que la velocidad del viento supera el umbral de peligro, habrá que simular la variación de coeficiente de presiones para ese estado estacionario (es decir, una duración de 10 minutos) y evaluar si tiene o no consecuencias estructurales. Así, se obtiene una serie de coeficientes de presiones, muestreados en los tramos peligrosos a $\Delta t = 0.0046\text{s}$, mientras que en el resto de la historia no se evalúa la respuesta estructural. Para el resto de valores, el intervalo de muestreo es el periodo donde la velocidad del viento se considera estacionaria, es decir, $T = 10\text{min}$.

Se destaca por último, que los instantes de peligro dependen de la serie temporal de velocidades utilizada por lo que, en un contexto probabilístico, la serie de instantes en los que se evalúa la estructura se convierte en una variable aleatoria, y de acuerdo con el método de Montecarlo, ya no habrá que utilizar siempre la serie total de valores equiespaciados $0 < t_1 < \dots < t_n = T$, sino que habrá que utilizar M muestras $0 < t_{i_1}^m < \dots < t_{i_m}^m < T$, $m = 1, \dots, M$ de valores no equiespaciados, correspondientes a los instantes de peligro. De acuerdo con esta notación, el vector de cargas nodales se expresará:

$$\mathbf{F}_{i_j}^m = \mathbf{F}(t_{i_j}^m), \quad j = 1, \dots, m, \quad m = 1, \dots, M$$

9.3 Problema de análisis

9.3.1 Objetivos y motivación

Una vez resuelto el problema, conviene analizar el sistema en el punto de funcionamiento óptimo, definido por el vector $\mathbf{m}^* = (R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)$. En este caso en particular, no se considerará incertidumbre suplementaria a la ya introducida en el problema de optimización. Hacerlo no sería complicado, pero como no aporta mucho valor añadido al estudio que se está llevando a cabo se ha decidido no incluir más incertidumbre. Algunas variables susceptibles de ser consideradas para el análisis como variables aleatorias serían la potencia producida por cada nodo (aunque sería más natural establecer un modelo que relacionara la potencia producida con variables ambientales y realizar el estudio integral desde el principio considerando dichas variables ambientales, por ejemplo la radiación solar), el coste del acero, que podría variar al estar en una economía de mercado, o el módulo de elasticidad longitudinal del acero, si no se tienen muchas garantías del fabricante.

El objetivo del análisis del sistema en condiciones de incertidumbre es poder sacar conclusiones sobre la variable fundamental, que es el beneficio obtenido, pero también sobre otras variables referentes al rendimiento, la gestión o la financiación.

Como el marco del problema es probabilístico, todas las variables analizadas, son, en realidad, variables aleatorias, cuyas distribuciones son desconocidas y pueden obtenerse mediante técnicas de Montecarlo. Para facilitar el análisis de todas estas variables, se realizarán tres tipos de acercamiento:

- **Estudio gráfico de las propiedades distribucionales:** Para ello, se presentará un gráfico que ilustre la distribución empírica de dicha variable aleatoria mediante un histograma y el diagrama en caja de la misma. Es importante señalar que la interpretación de estos gráficos debe ser sólo orientativa, ya que para un número pequeño de muestras (en este caso se realizarán $M = 100$ simulaciones por el método de Montecarlo), la representatividad de estos gráficos es limitada. Se presentan no obstante porque resultan visualmente muy esclarecedores.
- **Estadísticos frecuenciales:** Para variables aleatorias continuas, se presentarán estadísticos frecuenciales habituales: el máximo y el mínimo, la mediana, el primer y el tercer cuartil y los percentiles asociados al 5% y al 95%. Obsérvese que estos estadísticos, debido a que se realizarán $M = 100$ simulaciones, corresponden a valores concretos que se obtienen de las muestras simuladas. Dicho de otro modo, en general, el percentil p corresponderá al estadístico de orden $X_{(100p)}$ para la variable que se esté analizando. Estos 7 estadísticos presentados ilustran a grandes rasgos el carácter de la distribución subyacente y en estadística descriptiva su presentación se conoce como "*el resumen de los 7 números*".
- **Parámetros basados en el operador esperanza:** Entre estos estadísticos se incluyen todos los momentos generales y centrados. Para cada una de las variables de interés, se estimará el valor de su valor esperado y en algunas de ellas su desviación típica (riesgo cuadrático). Tal y como se ha presentado en el Capítulo 8, se usará el Algoritmo (A4) para, además de dar la estimación del parámetro, estimar el sesgo y el error estándar del estimador. Estos valores indican con qué exactitud y precisión se está estimando el parámetro respectivamente y evidentemente, dependen del tamaño de la muestra considerado.

9.3.2 Elementos de análisis

Análisis del beneficio

Para analizar el beneficio del sistema hay que analizar la variable aleatoria

$$P = - \sum_{k=1}^{N_b^0(C_{15}^*, C_{49}^*)} c_I^k(R^*) - K + \sum_{j=1}^N \left(N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*) D^j P - N_b^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*) c_M \right) (t_j - t_{j-1}) - C_R(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*) \mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}}$$

Esto se hará, además de mediante el estudio gráfico de su distribución, estimando los estadísticos frecuenciales $P_{(100p)}$, el beneficio medio $\mathbb{E}[P]$ y el riesgo cuadrático del beneficio $\sigma(P)$, estos dos últimos acompañados del sesgo y el error estándar de los estimadores.

Análisis del rendimiento

Evaluar el rendimiento del sistema se hará en tres fases:

1. **Rendimiento en términos contractuales:** Se calculará la probabilidad de que el sistema, en ese punto de funcionamiento, cumpla con las exigencias especificadas en el contrato. Siguiendo con la notación introducida hasta ahora, ésto se hace estimando la probabilidad de que la mínima potencia generada supere el umbral establecido, es decir, calculando

$$\pi = \Pr \left[\min_{j=1, \dots, N} \{N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)\} \geq \frac{P_{min}}{P} \right]$$

así como el calculando el índice de fiabilidad, que corresponde con el valor

$$\beta = \frac{\mathbb{E}[\min_{j=1, \dots, N} \{N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)\}] - \frac{P_{min}}{P}}{\sigma(\min_{j=1, \dots, N} \{N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)\})}$$

2. **Rendimiento en generación de energía:** Se considerará la energía total producida, que no es otra cosa que la variable

$$E = \sum_{j=1}^N N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)P$$

Del mismo modo que para el beneficio, se presentarán las gráficas de las distribuciones empíricas, se estimarán los estadísticos frecuenciales $E_{(100p)}$, el beneficio medio $\mathbb{E}[E]$ y el riesgo cuadrático del beneficio $\sigma(E)$, estos dos últimos acompañados de nuevo del sesgo y el error estándar de los estimadores.

Para evaluar el rendimiento en términos energéticos, se desea comparar el proyecto considerado con respecto a un proyecto sin riesgo (o con riesgo despreciable) como puede ser una central térmica de gas natural (cuyo precio es muy estable y por lo tanto se produce la misma energía) que genera para el consumo una energía en el mismo horizonte temporal E_0 . Así, se estimará la fiabilidad comparada de la inversión, es decir $\Pr[E \geq E_0]$ y el índice de fiabilidad $\beta_E = \frac{\mathbb{E}[E] - E_0}{\sigma(E)}$.

- 3. Parámetros importantes para la gestión:** En estos parámetros se incluye el número de reparaciones N y el tiempo entre reparaciones H . Estas variables se calculan directamente durante las simulaciones, ya que las reparaciones corresponden con los índices j que corresponden con valores $C_R \neq 0$. A partir de ahí, se calcula inmediatamente el número de paradas y los diferentes tiempos entre paradas. Para la variable N , discreta, se presentará la función de probabilidad empírica de la variable (es decir, la frecuencia de cada uno de los sucesos posibles) así como su valor esperado $\mathbb{E}[N]$, mientras que para la variable H se mostrarán las gráficas de la distribución empírica, los estadísticos frecuenciales $H_{(100p)}$ y el valor esperado de la distancia entre paradas $\mathbb{E}[H]$.

9.3.3 Análisis de rentabilidad y financiación

Por último se analizará la rentabilidad del sistema. Para ello de nuevo, se analizarán tres aspectos:

- 1. Parámetros de rentabilidad y financiación clásicos:** Estos parámetros son el valor actual neto (VAN), la tasa interna de rentabilidad (TIR) y el periodo de amortización T .

El valor actual neto no es más que el beneficio obtenido en cada periodo de tiempo considerando la capitalización monetaria. Para la capitalización se considerará un tipo de interés o tasa de descuento anual i , de forma que el VAN queda:

$$VAN = - \sum_{k=1}^{N_b^0(C_{15}^*, C_{49}^*)} c_I^k(R^*) - K + \sum_{j=1}^N \left[\frac{(N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)D^j P - N_b^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)c_M)(t_j - t_{j-1})}{(1+i)^j} - \frac{C_R(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)\mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}}}{(1+i)^j} \right]$$

La tasa interna de rentabilidad es el valor de i que anula la expresión anterior para el VAN y se calcula resolviendo iterativamente la ecuación no lineal en i anterior. Al ser el VAN una variable aleatoria, también lo será la TIR. El resultado de la TIR, por ser en general muy pequeño, se dará en un periodo de capitalización de un día ($TIR_d = (1 + TIR_h)^{24} - 1$, donde TIR_d es la tasa diaria y TIR_h la horaria). Finalmente, para el cálculo del periodo de amortización, se calcula el índice J (en mayúscula, puesto que es una variable aleatoria) en el que se obtiene por primera vez un beneficio positivo, es decir, J tal que:

$$P(J) = - \sum_{k=1}^{N_b^0(C_{15}^*, C_{49}^*)} c_I^k(R^*) - K + \sum_{j=1}^J (N_{np}^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)D^j P - N_b^j(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)c_M)(t_j - t_{j-1}) - C_R(R^*, C_{15}^*, C_{49}^*, \tau^*)\mathbb{I}_{\{t_j = a\tau^*, a \in \mathbb{N}\}} = 0$$

Pasar del índice J al tiempo de amortización T es trivial puesto que las muestras son horarias.

Para estas tres variables, se presentarán las gráficas de las densidades empíricas, los estadísticos frecuenciales y se estimarán los valores esperados.

- 2. Ratio de Sharpe:** De cara a evaluar la inversión en un contexto de carteras de productos financieros, se calculará el ratio de Sharpe suponiendo un interés libre de riesgo (que podría corresponder a bonos del

estado¹) i_f . El ratio de Sharpe se calcula a partir de la tasa interna de rentabilidad (que es una variable aleatoria) directamente:

$$Sr = \frac{\mathbb{E}[\text{TIR}] - i_f}{\sigma(\text{TIR})}$$

- 3. Análisis comparado:** Para cualquier análisis de un punto de funcionamiento, se puede considerar un análisis comparado, con respecto a otro producto financiero. Se comparará el beneficio con un activo cuyo interés compuesto horario medio es i_r y cuya volatilidad es $v = \beta_v i_r$ (expresada por tanto como una fracción de la tasa de retorno). Para modelizar el activo se usa el clásico modelo log-normal, es decir, se usa para la tasa de retorno R una distribución $\text{LogN}(\mu = i_r, \sigma = v)$ [9]. Así, se calculará la fiabilidad comparada del activo a partir de su tasa interna de rentabilidad estimando

$$\Pr[\text{TIR}_h > R]$$

El índice de fiabilidad, a su vez, se estima definiendo $S = \text{TIR} - R$ y calculando:

$$\beta = \frac{\mathbb{E}[S]}{\sigma(S)}$$

¹ Con la coyuntura económica actual, los bonos del estado han dejado de tener su carácter de inversión segura, pero a efectos de este estudio esto es puramente una formalidad

9.4 Valores de los parámetros adoptados

Una vez definido el problema y todas los datos, parámetros y variables que en él intervienen, se ha establecido el valor de los parámetros: dichos parámetros incluyen todos los vistos hasta ahora, tanto parámetros intrínsecos como de diseño. La Tabla 9.2 presenta el valor de todos los parámetros usados para la resolución del problema, salvo, por supuesto, las tres variables de optimización, que se recuerda que son R , C_{15} , C_{49} y τ .

Se ha pretendido que todos los parámetros sean cercanos a sus valores reales o de mercado. No obstante, como es sabido, la energía fotovoltaica es, aún hoy, generalmente deficitaria, de ahí que los valores del precio unitario del acero, por un lado, pero sobre todo de la potencia producida, se han tomado más ventajosos, de cara a que los resultados sean más ilustrativos (en términos de beneficios en lugar de pérdidas). No obstante, el interés académico y metodológico es el mismo independientemente del valor de los parámetros. Un valor más razonables para el precio unitario del acero sería 1.5 €/kg, mientras que la potencia producida por un nodo debería ser del orden de 100 veces menor.

Tabla 9.2 Valores de los parámetros escogidos para el problema.

PARÁMETROS			
Parámetros mecánicos	Espesor del tubo	e	10mm
	Módulo de elasticidad longitudinal	E_s	210 GPa
	Límite elástico	σ_s	300 MPa
Parámetros económicos	Costes fijos	K	100 €
	Coste del acero	r	0.25 €/kg
	Densidad del acero	ρ	7850 kg/m ³
	Coste de mantenimiento	c_M	25 €/año
	Potencia producido por cada nodo	P_0	0.6 kW
OPTIMIZACIÓN			
Función objetivo	Función: Valor en Riesgo a nivel q	$CVAR_q$	
	Nivel de riesgo asumido	q	0.6
Restricciones	Potencia mínima asumida	P_{min}	1 W
	Probabilidad mínima de servicio	α	0.4
	Presupuesto inicial	C_{max}	180 €
ANÁLISIS			
Tecnología energética	Energía generada	E_0	4.0 MWh
Rentabilidad	Tasa de descuento anual	i	5 %
	Interés libre de riesgo (horario)	i_f	0.01 %
Activo	Interés compuesto medio (horario)	i_r	0.05 %
	Volatilidad	β_V	10 %

9.5 Resultados

En esta sección se presentan los principales resultados del problema planteado. En primer lugar se presentarán los resultados de la fase de diseño y posteriormente los de la fase de análisis.

9.5.1 Diseño del colector

Se han etiquetado los $N = 36$ casos de diseño posibles con la numeración que se observa en la Tabla 9.3.

Tabla 9.3 Valores de las variables de diseño para los diferentes casos analizados.

Número	Radio (R)	Barra 1 - 5 (C_{15})	Barra 4 - 9 (C_{49})	Periodo entre reparaciones (τ)
1	18 mm	No	No	1 día
2	18 mm	No	No	1 mes
3	18 mm	No	No	6 meses
4	18 mm	No	Si	1 día
5	18 mm	No	Si	1 mes
6	18 mm	No	Si	6 meses
7	18 mm	Si	No	1 día
8	18 mm	Si	No	1 mes
9	18 mm	Si	No	6 meses
10	18 mm	Si	Si	1 día
11	18 mm	Si	Si	1 mes
12	18 mm	Si	Si	6 meses
13	19 mm	No	No	1 día
14	19 mm	No	No	1 mes
15	19 mm	No	No	6 meses
16	19 mm	No	Si	1 día
17	19 mm	No	Si	1 mes
18	19 mm	No	Si	6 meses
19	19 mm	Si	No	1 día
20	19 mm	Si	No	1 mes
21	19 mm	Si	No	6 meses
22	19 mm	Si	Si	1 día
23	19 mm	Si	Si	1 mes
24	19 mm	Si	Si	6 meses
25	20 mm	No	No	1 día
26	20 mm	No	No	1 mes
27	20 mm	No	No	6 meses
28	20 mm	No	Si	1 día
29	20 mm	No	Si	1 mes
30	20 mm	No	Si	6 meses
31	20 mm	Si	No	1 día
32	20 mm	Si	No	1 mes
33	20 mm	Si	No	6 meses
34	20 mm	Si	Si	1 día
35	20 mm	Si	Si	1 mes
36	20 mm	Si	Si	6 meses

En la Figura 9.2 se muestra el valor de la función objetivo para cada uno de los casos considerados mientras que en la Figura 9.3 se muestra el valor de las restricciones para estos mismos puntos.

Observando los resultados del valor en riesgo del beneficio al 60% se observa que:

- El beneficio (o mejor dicho, el valor en riesgo del beneficio) es tanto más sensible al radio cuando éste es menor ($R = 18$ mm principalmente, casos 1 a 12). Para los radios mayores ($R = 19$ mm y $R = 20$ mm) las variaciones del beneficio son considerablemente menores. Esto es debido a que los costes iniciales

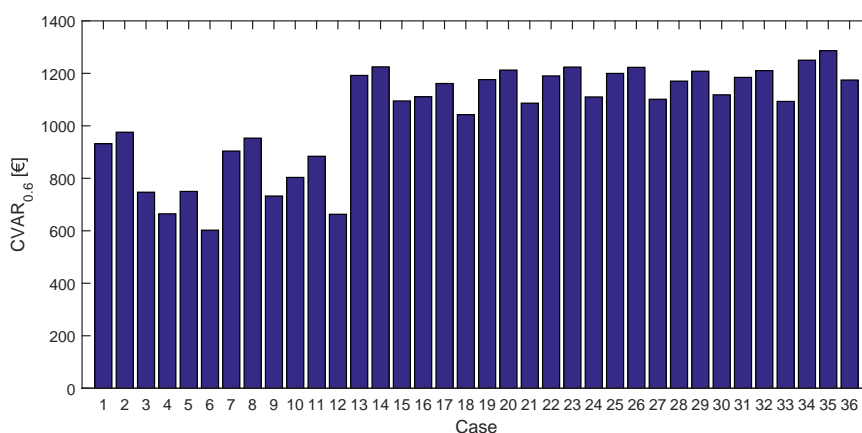


Figura 9.2 Valor de la función objetivo para los 36 puntos del catálogo.

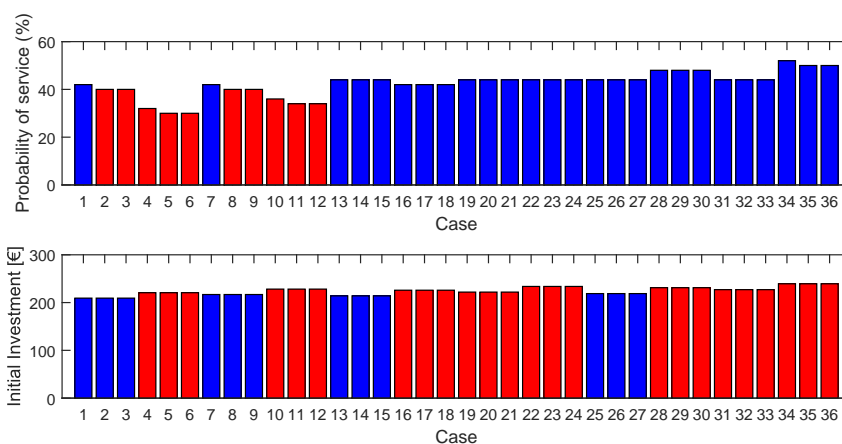


Figura 9.3 Valor de las restricciones para los 36 puntos del catálogo. En rojo los valores que corresponden a puntos no factibles.

debidos a utilizar piezas más caras se diluyen, siempre que la estructura esté del lado de la seguridad, algo que parece suceder para radios grandes. Cuanto más altos sean los radios de las piezas, al estar la estructura del lado de la seguridad, el problema se acerca más al caso determinista. Estos casos corresponden al diseño tradicional estructural, donde los coeficientes de seguridad garantizan que se esté en el dominio determinista y que por lo tanto no se tengan en cuenta las fluctuaciones estocásticas.

- Del mismo modo, para estos mismos casos el beneficio es más insensible al carácter estático de la estructura y al periodo entre reparaciones. Al no estar en el dominio probabilístico, el diseño es robusto y por lo tanto el beneficio no depende prácticamente de si se introduce una barra más o una barra menos, o si se repara cada día, cada mes o cada seis meses.

- No obstante, hay que recordar que se está utilizando como función objetivo un valor en riesgo del 60 %, es decir, se está considerando un promedio entre el 60 % de los casos que menos beneficio arrojan. Los resultados serían diferentes si se considerase el beneficio medio o la tasa interna de retorno, por ejemplo. Esto se verá en análisis posteriores.
- Una observación muy interesante es que añadir la barra 4 - 9 es contraproducente para estructuras poco robustas: parece ser que la redistribución de esfuerzos que entrañaría esta nueva topología transmitiría esfuerzos a elementos más solicitados o con menos capacidad resistente. Resulta, por lo tanto, que añadir elementos estructurales (y por lo tanto aumentar el grado de hiperestaticidad de la estructura) es en este caso perjudicial. Para radios más elevados, al tener estructuras más resistentes, este fenómeno desaparece progresivamente.
- Otra observación de interés es que parece ser que el periodo óptimo de reparación es cada mes. Este parámetro de diseño influye significativamente en el valor en riesgo del beneficio para los casos sensibles (4, 5, 6, 10, 11 y 12) como puede verse claramente en el gráfico, aunque su efecto es tanto menor (como es esperable) el problema se desplaza hacia el dominio determinista, en el que la estructura rompe menos a menudo. La explicación de esto es que la velocidad del viento, aunque estacionaria, está autocorrelada, de forma que existe agrupación de valores altos de la misma en franjas temporales reducidas. Dejando más tiempo entre reparaciones, se puede evitar que se dé el suceso de reparar una estructura sin que el fenómeno meteorológico que la ha hecho caer haya amainado.
- En cualquier caso, parece razonable que, teniendo en cuenta que el valor en riesgo del beneficio total es de aproximadamente 1200 € a partir de un radio de 19 mm, parece razonable concluir que este valor es una frontera de decisión importante de cara al diseño. El valor máximo del valor en riesgo del beneficio se obtiene para $R = 20$ mm, siendo el resto de valores $C_{15} = 0$, $C_{49} = 0$, $\tau = 1$ mes. Hay que destacar que, si, por ejemplo, el coste de los materiales fuera mucho mayor, seguramente ésto repercutiría en el valor en riesgo del beneficio y desde luego tendría una influencia directa si como espíritu del problema se hubiera escogido el beneficio esperado.

Por otra parte, observando el valor que alcanzan las restricciones se observa:

- Añadir elementos estructurales o incrementar el radio interior de los elementos aumenta paulatinamente la inversión inicial, de forma que para los últimos casos, comienza a haber varios casos que superan el umbral de inversión inicial permitido. Al principio dicho umbral sólo se supera en las estructuras más hiperesáticas (influencia de C_{15} y C_{49}), pero después también interviene el tipo de pieza escogida (influencia del radio R).
- Para algunos casos concretos (casos 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 y 12), el rendimiento del sistema no es admisible según lo dispuesto. Obsérvese que, como se ha indicado anteriormente, esto es sorprendente, en cuanto que en algunos casos se trata de estructuras más hiperestáticas, pero que, por lo visto, comprometen más la integridad estructural global.
- Como cabía esperar, los casos cercanos al dominio determinista son los que ofrecen más seguridad en cuanto al rendimiento del sistema en términos contractuales. Sin embargo, analizada individualmente, esta gráfica no tiene sentido, puesto que lo que se persigue (en este ejemplo concreto) es el beneficio del sistema, no sus prestaciones.
- Como "regla de oro" general, para este tipo de problemas, está claro que las restricciones presupuestarias exigen estructuras más baratas, mientras que las de rendimiento, exigen estructuras más caras, generando un compromiso evidente. La consideración del beneficio, dentro de un contexto de incertidumbre, permite lidiar con este problema para garantizar una solución racionalmente óptima.

En definitiva, para este problema analizado, con el valor de los parámetros dados en la Tabla 9.2, la solución óptima del problema es la estructura isostática (sin las barras 1 - 5 y 4 - 9), cuyos elementos son tubos huecos de radio interior $R = 19$ mm y que se repara, si es necesario, mensualmente.

En cualquier caso, este problema de optimización sencillo pone de manifiesto la enorme riqueza que plantea la metodología presentada. La sección siguiente, que se dedica al análisis de la incertidumbre insiste en ello.

9.5.2 Análisis del sistema

A continuación se procede al análisis del sistema en condiciones de incertidumbre. Con fines meramente ilustrativos y académicos, no se analizará únicamente el funcionamiento del sistema en el punto de óptimo sino que se hará también para otras tres condiciones de diseño, con el fin de comprender, para este caso ejemplo concreto, la naturaleza de los fenómenos que ocurren en toda su dimensión.

Se recuerda que el punto de óptimo diseño corresponde con el caso en que $R = 18 \text{ mm}$, $C_{15} = 0$, $C_{49} = 0$ y $\tau = 1 \text{ mes}$. Además de este punto de funcionamiento, que se denominará **punto de funcionamiento óptimo**, se estudiará el funcionamiento del sistema para $R = 22 \text{ mm}$, $C_{15} = 0$, $C_{49} = 0$ y $\tau = 1 \text{ mes}$, que se denominará **punto de funcionamiento sobredimensionado**, para $R = 19 \text{ mm}$, $C_{15} = 0$, $C_{49} = 0$ y $\tau = 1 \text{ d}$, llamado **punto de funcionamiento con reparaciones excesivas** y para $R = 19 \text{ mm}$, $C_{15} = 0$, $C_{49} = 0$ y $\tau = 6 \text{ meses}$, llamado **punto de funcionamiento con reparaciones insuficientes**.

Primer acercamiento

Antes de entrar en el estudio en detalle de variables específicas, se analizará el **comportamiento característico** en estos cuatro casos presentados. El comportamiento característico ilustra la tendencia general del sistema estudiado en su horizonte de diseño. Para analizar la tendencia, se estudiará la curva de amortización de una estructura mediana (situada en el 50 % de la distribución) así como la de los percentiles a 5 % y a 95 %. Los resultados para los cuatro casos presentados pueden verse en la Figura 9.5.

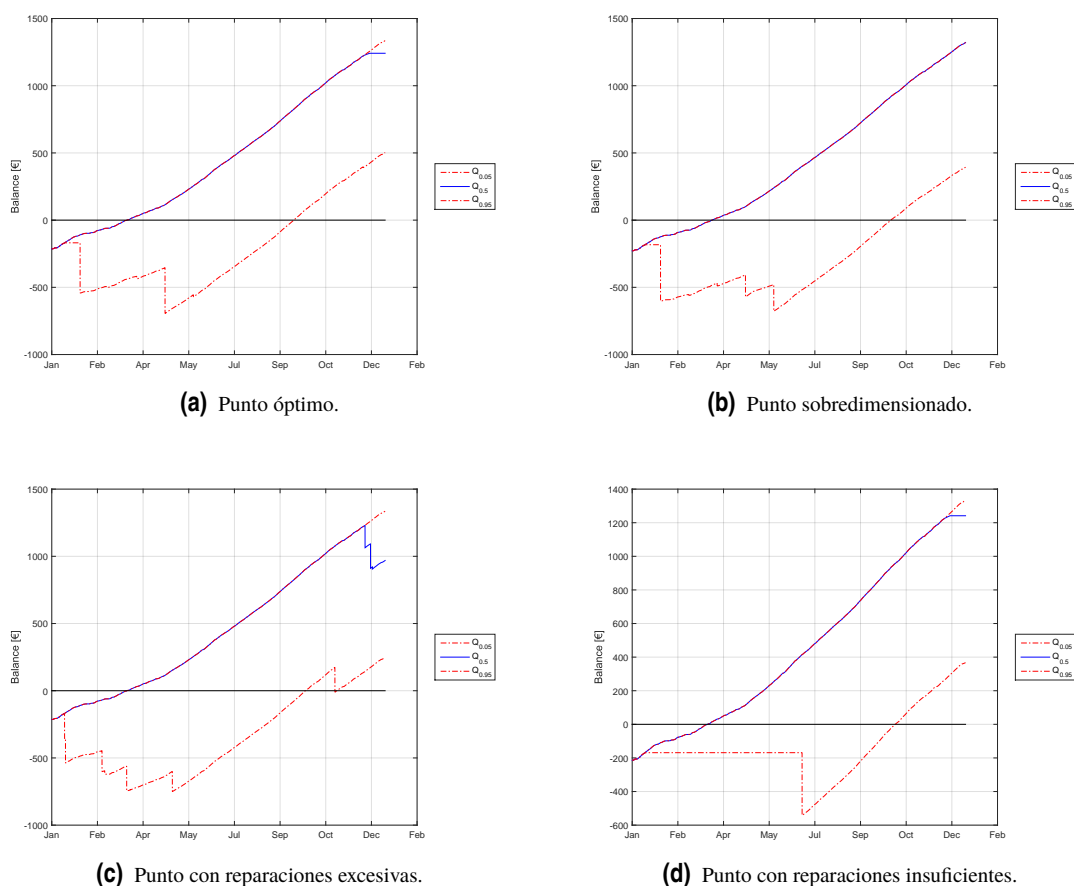
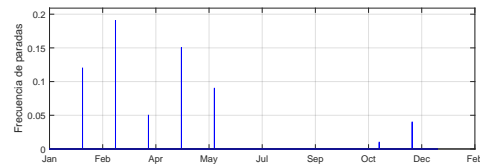
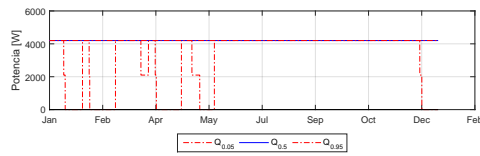


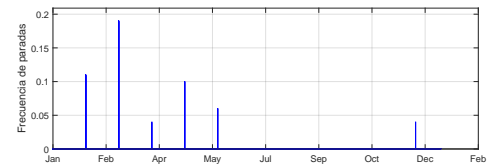
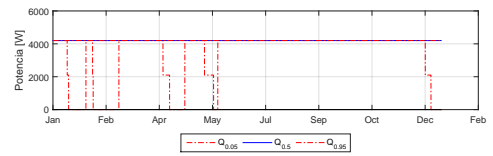
Figura 9.4 Distribuciones del beneficio para los cuatro casos presentados.

Del mismo modo, para analizar el rendimiento característico, se pueden estudiar las mismas curvas pero para la potencia instantánea producida a lo largo del año. En la Figura ?? se muestran estos resultados, junto

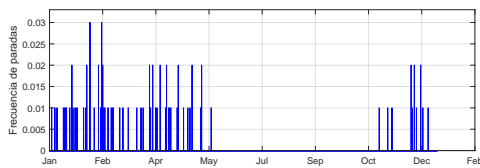
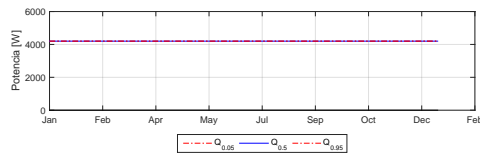
con una gráfica que muestra la frecuencia de fallo a lo largo del año.



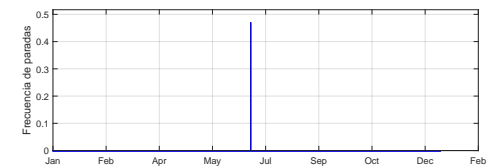
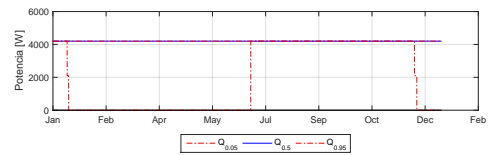
(a) Punto óptimo.



(b) Punto sobredimensionado.



(c) Punto con reparaciones excesivas.



(d) Punto con reparaciones insuficientes.

Figura 9.5 Distribuciones del beneficio para los cuatro casos presentados.

Beneficio

Se presenta en primer lugar en la Figura 9.6 la distribución del beneficio para cada uno de los casos, ilustrada mediante un histograma y un diagrama en caja. Por supuesto, hay que ser cuidadoso para interpretar estas gráficas, ya que se han realizado $N = 100$ simulaciones. En cualquier caso, con ellas se pretende ilustrar a grandes rasgos el fenómeno.

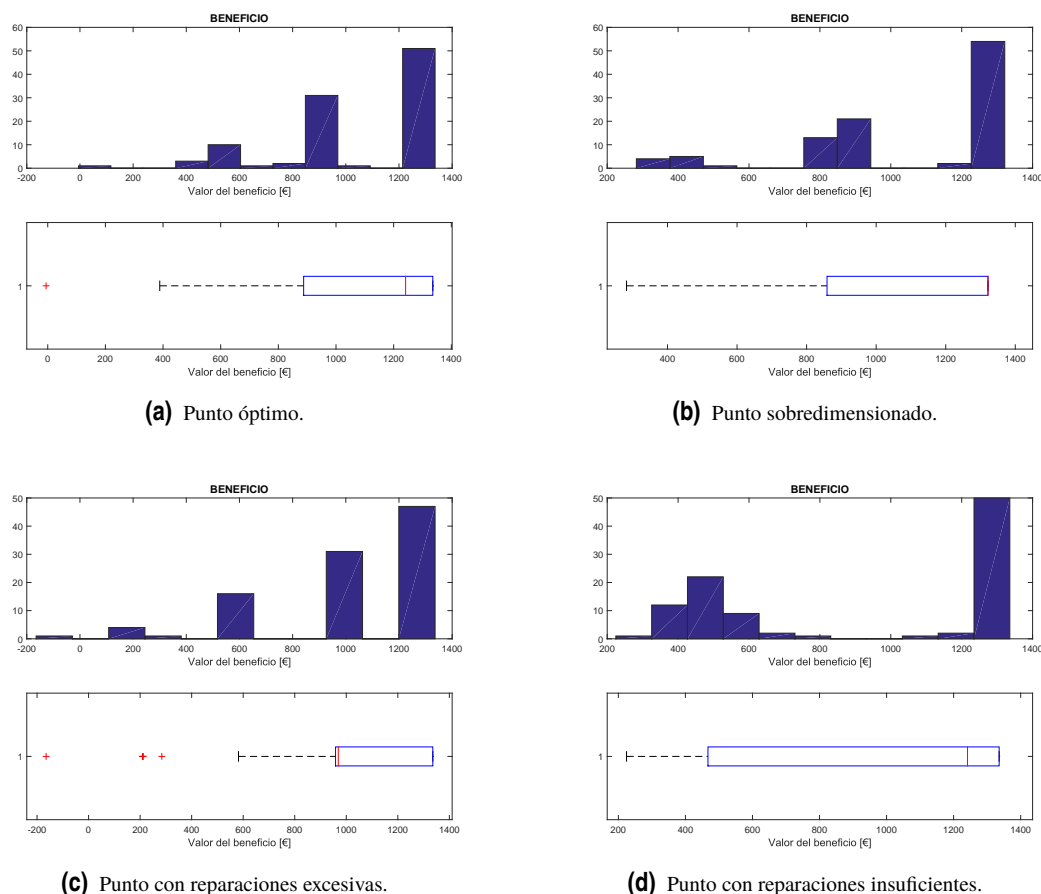


Figura 9.6 Distribuciones del beneficio.

Más adecuado resulta estudiar algunos parámetros estadístico frecuenciales y basados en el valor esperado. Para estos últimos, además, mediante *bootstrapping* se puede calcular el sesgo y el error estándar de las estimaciones para el tamaño de muestra considerado. En la Tabla 9.4 se presentan algunos estadísticos frecuenciales, que también hay que ser cuidadoso al interpretarlos, y en la Tabla 9.5 otros basados en el valor esperado. Finalmente, en la Tabla 9.6 se muestra la probabilidad de pérdidas.

Tabla 9.4 Análisis frecuencial del beneficio.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	-5.62 €	502.76 €	887.73 €	1241.45 €	1335.80 €	1335.80 €	1335.80 €
Punto sobredimensionado	282.25 €	393.80 €	858.71 €	1321.50 €	1321.50 €	1321.50 €	1321.50 €
Punto con reparaciones excesivas	-164.79 €	248.03 €	958.40 €	969.00 €	1335.80 €	1335.80 €	1335.80 €
Punto con reparaciones insuficientes	224.39 €	367.17 €	467.25 €	1241.45 €	1335.80 €	1335.80 €	1335.80 €

De las gráficas y las tablas presentadas se desprenden las siguientes conclusiones:

- El beneficio no varía demasiado, en promedio, entre los diferentes casos de diseño, situándose en torno a los 1000 €. Sin embargo sí que se observa que el número de reparaciones influye directamente en el riesgo asumido (valor del riesgo cuadrático). Cuando las reparaciones son insuficientes, más se está

Tabla 9.5 Análisis estadístico del beneficio.

	Beneficio medio			Riesgo cuadrático		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	1057.02 €	-0.21 €	28.34 €	317.51 €	-1.42 €	24.27 €
Punto sobredimensionado	1065.64 €	0.28 €	30.76 €	313.65 €	2.36 €	22.12 €
Punto con reparaciones excesivas	1030.43 €	-5.25 €	36.37 €	352.84 €	0.76 €	23.08 €
Punto con reparaciones insuficientes	927.72 €	-1.49 €	40.82 €	429.31 €	-0.74 €	9.62 €

Tabla 9.6 Análisis de riesgo de pérdidas.

	Probabilidad de pérdidas		
	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	1.00 %	0.14 %	1.20 %
Punto sobredimensionado	0.00 %	0.00 %	0.00 %
Punto con reparaciones excesivas	1.00 %	-0.30 %	0.79 %
Punto con reparaciones insuficientes	0.00 %	0.00 %	0.00 %

vinculando el rendimiento del sistema a las condiciones meteorológicas y por lo tanto más riesgo se está adoptando. El riesgo no tiene que ser entendido en este contexto como algo negativo, sino como incertidumbre, aunque en este caso, debido a la fuerte asimetría de las distribuciones, el riesgo trae consigo una ligera pérdida de beneficios: a menor número de reparaciones, mayor es la cola inferior de la distribución.

- Sobredimensionar la estructura reduce considerablemente la incertidumbre, empujando el sistema hacia el dominio determinista. Además, en este caso aumenta el beneficio medio a pesar de encarecer los costes iniciales y de reparación. Es oportuno recordar que, por un lado, para el problema de optimización se usó el valor en riesgo del beneficio, en lugar del beneficio medio, y que además el problema de optimización incluía restricciones en la inversión inicial, por lo que es normal que en el análisis realizado el caso óptimo no arroje los mejores valores.
- En algunos casos existe una pequeña probabilidad de pérdidas (no mayor a 1 %). Este riesgo es asumible siempre que signifique una contrapartida en términos de aumento del beneficio.
- Puede observarse en los estadísticos frecuenciales y en los histogramas que reparar un número excesivo de veces aumenta las colas de la distribución (especialmente la cola negativa, ya que la distribución es asimétrica hacia la izquierda). Esto es lógico ya que flexibilizar más la reparación es una forma de actualizar más a menudo el estado del sistema, del mismo modo que muestrear con más frecuencia una señal da más información sobre las colas de la distribución subyacente. Por otra parte, reparar cada más tiempo segrega los escenarios en clases o modas característicos de los fenómenos meteorológicos.

Rendimiento

En primer lugar se analizará el rendimiento en términos contractuales, es decir, la probabilidad que tiene el sistema de rendir de acuerdo con las especificaciones para las cuales se ha diseñado. Esto revelará la holgura de la que se dispone, con respecto a las restricciones del problema de optimización. En la Tabla 9.7 se muestra la fiabilidad del sistema y el índice de fiabilidad para cada caso.

Tabla 9.7 Análisis del rendimiento en términos contractuales.

	Fiabilidad	Índice de fiabilidad
Punto óptimo	47 %	0.94
Punto sobredimensionado	52 %	1.04
Punto con reparaciones excesivas	47 %	0.94
Punto con reparaciones insuficientes	47 %	0.94

De estos resultados se desprende que el sistema es muy poco sensible a las variables estudiadas en relación con el rendimiento que se le exige por contrato. En todos los casos contemplados, el sistema no es muy fiable. Esto es normal, puesto que se ha optimizado el sistema en torno a unos valores de fiabilidad de 40 %, es decir, relajando mucho las condiciones de que rinda según lo esperado. La fiabilidad del sistema de acuerdo con sus especificaciones contractuales puede verse observando que todos los índices de fiabilidad son positivos.

El principal análisis en términos de rendimiento del sistema que puede hacerse es estimar cuanta energía habrá sido capaz de producir a lo largo de su vida útil. Dicho análisis es en cierto modo análogo al que se hizo del beneficio. En la Figura 9.7 se muestra la distribución la energía producida para cada uno de los casos, ilustrada de nuevo mediante un histograma y un diagrama en caja.

En la Tabla 9.8 se presentan los estadísticos frecuenciales y en la Tabla 9.9 los basados en el valor esperado.

Tabla 9.8 Análisis frecuencial de la energía producida.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	30.64 MWh	32.76 MWh	34.43 MWh	36.17 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh
Punto sobredimensionado	31.94 MWh	33.21 MWh	34.73 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh
Punto con reparaciones excesivas	36.54 MWh	36.63 MWh	36.71 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh
Punto con reparaciones insuficientes	17.02 MWh	19.33 MWh	22.93 MWh	34.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh	36.79 MWh

Tabla 9.9 Análisis estadístico de la energía producida.

	Valor medio			Riesgo cuadrático		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	35.65 MWh	-6.1 kWh	155.0 kWh	1.47 MWh	-33.5 kWh	126.3 kWh
Punto sobredimensionado	35.75 MWh	7.6 kWh	116.40 kWh	1.32 MWh	-15.86 kWh	99.21 kWh
Punto con reparaciones excesivas	36.75 MWh	-0.2 kWh	7.4 kWh	0.06 MWh	-0.2 kWh	5.4 kWh
Punto con reparaciones insuficientes	30.45 MWh	-326.3 kWh	778.0 kWh	7.05 MWh	-79.4 kWh	269.7 kWh

De cara a hacer un análisis comparado, se supone otra tecnología de generación de energía y se compara con respecto a ella. De nuevo con el valor de los parámetros dados en la Tabla 9.2 se obtienen los valores que pueden verse en la Tabla 9.10.

Tabla 9.10 Análisis comparativo del rendimiento.

	Fiabilidad comparada rendimiento			Índice de fiabilidad		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	47 %	-0.06 %	4.81 %	-0.72	-0.01	0.08
Punto sobredimensionado	52 %	-0.44 %	4.55 %	-0.71	-0.01	0.08
Punto con reparaciones excesivas	81 %	0.26 %	3.28 %	0.88	0.00	0.17
Punto con reparaciones insuficientes	47 %	-0.56 %	4.96 %	-0.89	-0.01	0.11

Las principales conclusiones que se desprenden de estos análisis son:

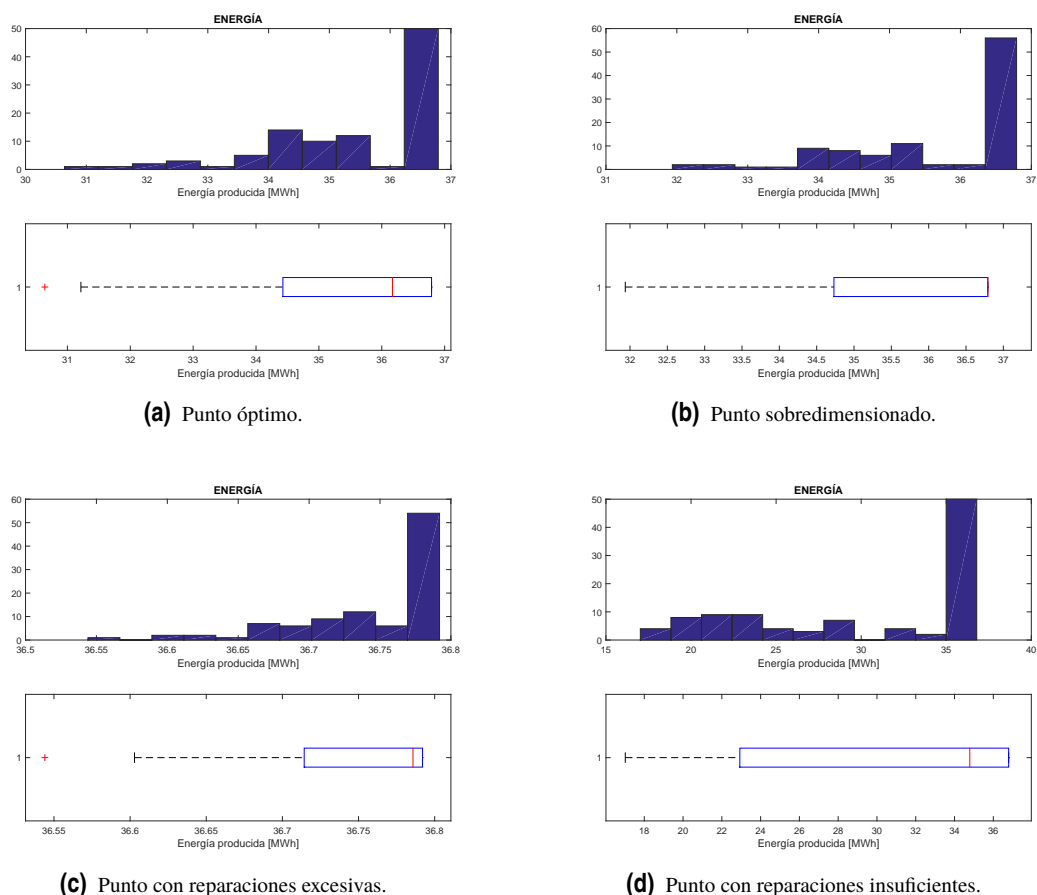


Figura 9.7 Distribuciones de la energía producida para los cuatro casos presentados.

- Como es de esperar, la energía producida sí que es un factor sobre el que repercuten enormemente las variables de diseño. Es uno de los dos factores (junto con los costes iniciales y de reparación) que repercute directamente sobre el beneficio, pero en este caso no hay duda: cuanto más seguro, robusto y fuerte sea el sistema y más veces se repare, mejor. De ahí que el comportamiento es creciente para todos los estadísticos de posición: a mayor frecuencia de reparaciones y a mayor radio, mayor energía producida en todos los aspectos (estadísticos frecuenciales, energía media producida...).
- Del mismo modo, cuanto más robusta es la estructura o más se repara, más seguro es que se produzca más energía que mediante otra tecnología, pasando de un 47 % a un 81 % de probabilidad de producir más energía. Aumentar el valor del radio o la frecuencia de las reparaciones hace mucho más fiable el sistema desde el punto de vista energético, la cuestión es si merece la pena hacerlo en términos de beneficio, y como ya se ha visto esto no es cierto.
- En el análisis comparado puede verse que sólo puede hablarse de verdadera fiabilidad del sistema con respecto a una tecnología de comparación para el caso de reparaciones excesivas. La frecuencia de las reparaciones es sin duda alguna el parámetro que más influye en la energía generada por el sistema, situándolo en el marco determinista y volviéndolo mucho más fiable.

Finalmente, de cara a la gestión de la planta, dos variables importante es el número de reparaciones necesarias y el tiempo entre reparaciones. La Figura 9.8 muestra las distribuciones del número de reparaciones y la Figura 9.9 las distribuciones del tiempo entre paradas para todos los casos. En la Tabla 9.11 las estimaciones frecuenciales del tiempo entre paradas y la Tabla 9.12 la estimación del número de reparaciones medio y el tiempo medio entre reparaciones.

En definitiva, a grandes rasgos puede verse que:

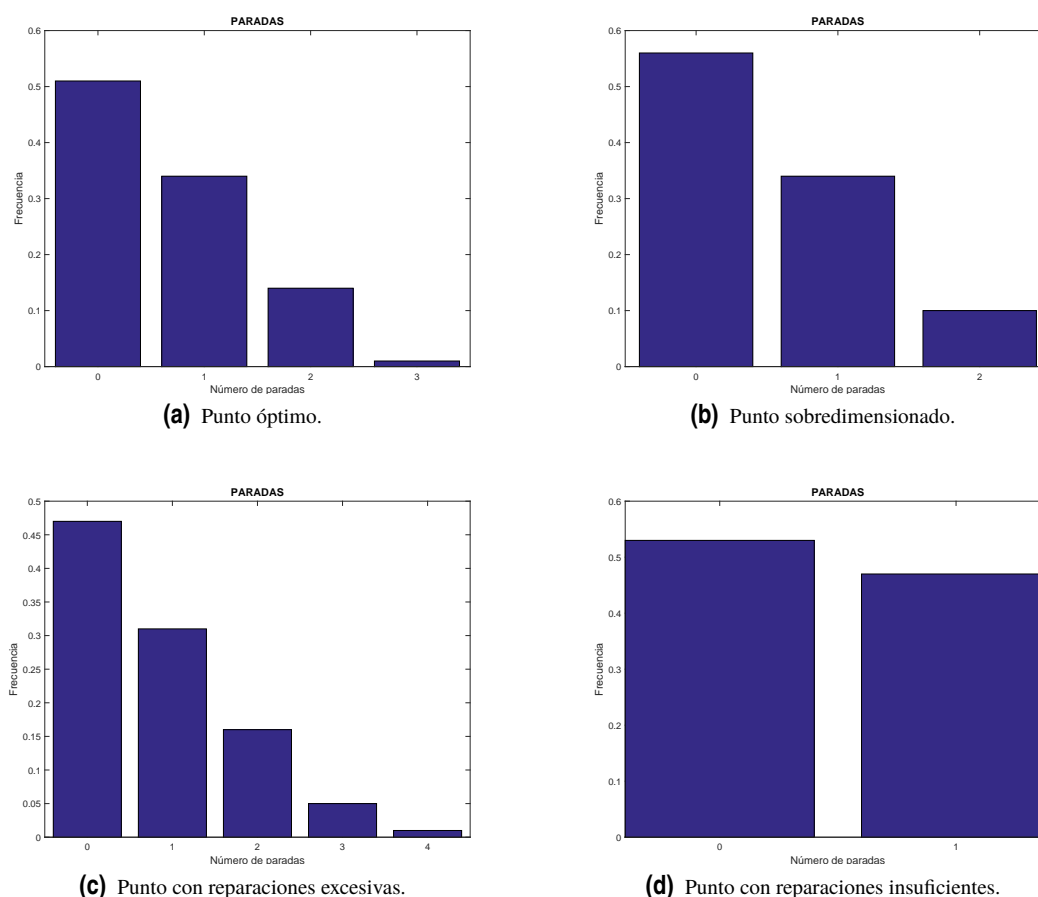


Figura 9.8 Distribuciones del número de paradas.

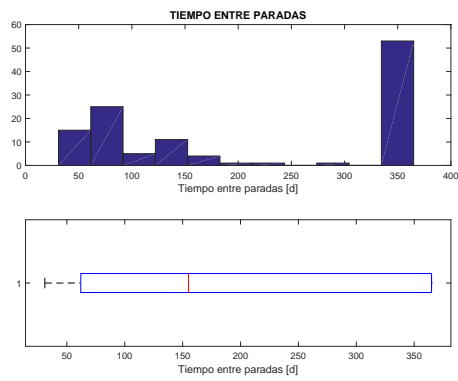
Tabla 9.11 Análisis frecuencial del tiempo entre paradas.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	31 d	31 d	62 d	155 d	365 d	365 d	365 d
Punto sobredimensionado	31 d	31 d	62 d	365 d	365 d	365 d	365 d
Punto con reparaciones excesivas	1 d	5 d	40 d	120 d	365 d	365 d	365 d
Punto con reparaciones insuficientes	186 d	186 d	186 d	365 d	365 d	365 d	365 d

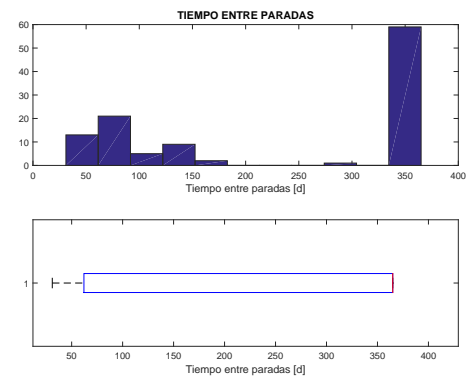
Tabla 9.12 Parámetros estadísticos útiles para la gestión de la planta.

	Número medio de reparaciones			Tiempo medio entre reparaciones		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	0.65	-0.01	0.08	211 d	-3 d	14 d
Punto sobredimensionado	0.54	-0.0	0.05	230 d	2 d	13 d
Punto con reparaciones excesivas	0.82	-0.01	0.09	188 d	0 d	12 d
Punto con reparaciones insuficientes	0.47	-0.00	0.05	281 d	0 d	9 d

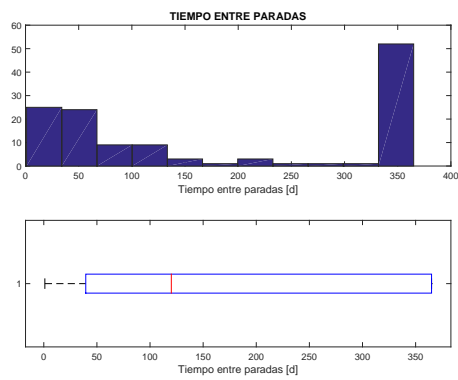
- Definir tiempos entre reparaciones grandes polariza las distribuciones de tiempo entre paradas, y disminuye en promedio el número de paradas. A efectos de gestión está claro que esto es lo deseable, al contrario de lo que sucedía si se valoraba la producción de energía.
- El radio de las piezas utilizadas tiene una influencia mucho más clara: no polariza el tiempo entre reparaciones, sino que lo aumenta, al mismo tiempo que disminuye en términos generales el número de reparaciones que se llevan a cabo.
- En cualquier caso, de aquí se extraen importantes conclusiones a efectos de gestión: en promedio, hay menos de una parada y el tiempo entre paradas va de 200 a 300 días aproximadamente. Esto permite definir en el momento de la puesta en marcha de la obra cómo se va a organizar el stock de las



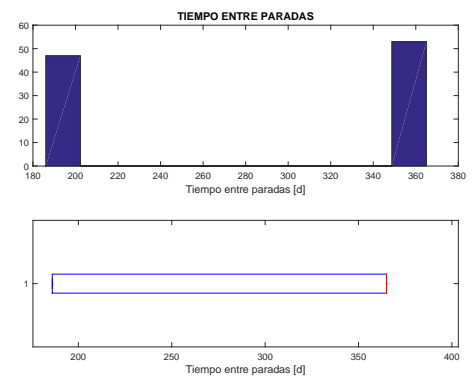
(a) Punto óptimo.



(b) Punto sobredimensionado.



(c) Punto con reparaciones excesivas.



(d) Punto con reparaciones insuficientes.

Figura 9.9 Distribuciones del tiempo entre paradas.

piezas de repuesto y en el momento de que el stock se acabe, cual es el tiempo del que se dispone para conseguirlo antes de que vuelva a producirse una avería.

Rentabilidad y financiación

Para acabar, se evaluará la rentabilidad de la inversión en el proyecto concreto que se está analizando. Dicha rentabilidad se analizará en términos del valor actual neto, la tasa interna de rentabilidad y el periodo de retorno de la inversión. La Figura 9.10, la Figura 9.11 y la Figura 9.12 muestran las distribuciones empíricas de estas tres variables respectivamente, donde de nuevo se insiste que se ha de ser cuidadoso para interpretar los resultados. Los estadísticos frecuenciales de estas variables se muestran respectivamente en la Tabla 9.13, la Tabla 9.14 y la Tabla 9.15 y la estimación del valor medio de estas tres variables en la Tabla 9.16.

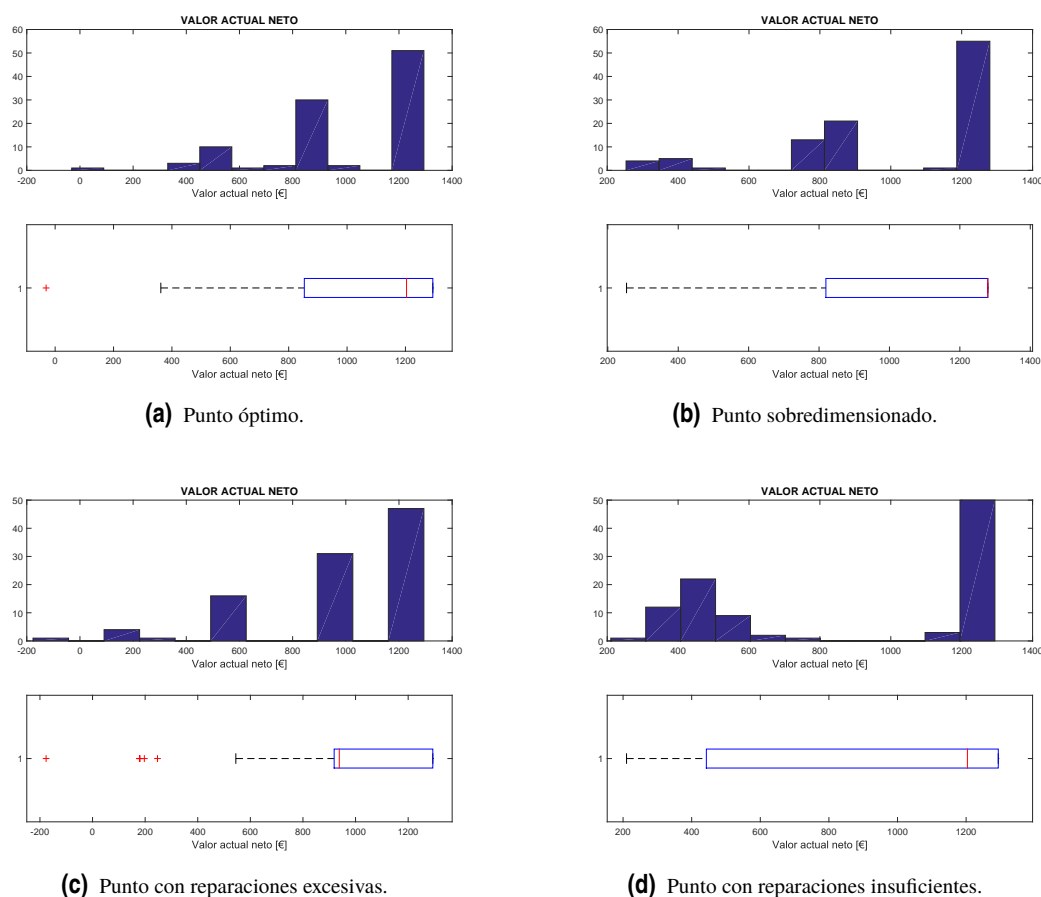


Figura 9.10 Distribuciones del valor actual neto.

Tabla 9.13 Análisis frecuencial del valor actual neto.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	-30.95 €	471.08 €	853.57 €	1203.75 €	1293.73 €	1293.73 €	1293.73 €
Punto sobredimensionado	253.20 €	364.29 €	819.46 €	1279.44 €	1279.44 €	1279.44 €	1279.44 €
Punto con reparaciones excesivas	-176.56 €	221.94 €	918.61 €	938.10 €	1293.73 €	1293.73 €	1293.73 €
Punto con reparaciones insuficientes	210.14 €	345.45 €	442.79 €	1203.75 €	1293.73 €	1293.73 €	1293.73 €

Tabla 9.14 Análisis frecuencial de la tasa interna de rentabilidad diaria.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	-0.00 %	0.33 %	0.67 %	1.43 %	1.44 %	1.44 %	1.44 %
Punto sobredimensionado	0.16 %	0.25 %	0.60 %	1.36 %	1.36 %	1.36 %	1.36 %
Punto con reparaciones excesivas	-0.15 %	0.19 %	0.61 %	1.42 %	1.44 %	1.44 %	1.44 %
Punto con reparaciones insuficientes	0.28 %	0.33 %	0.50 %	1.43 %	1.44 %	1.44 %	1.44 %

El ratio de Sharpe es un parámetro muy utilizado para evaluar la rentabilidad de una inversión. Para los cuatro casos estudiados, el ratio de Sharpe se muestra en la Tabla 9.17

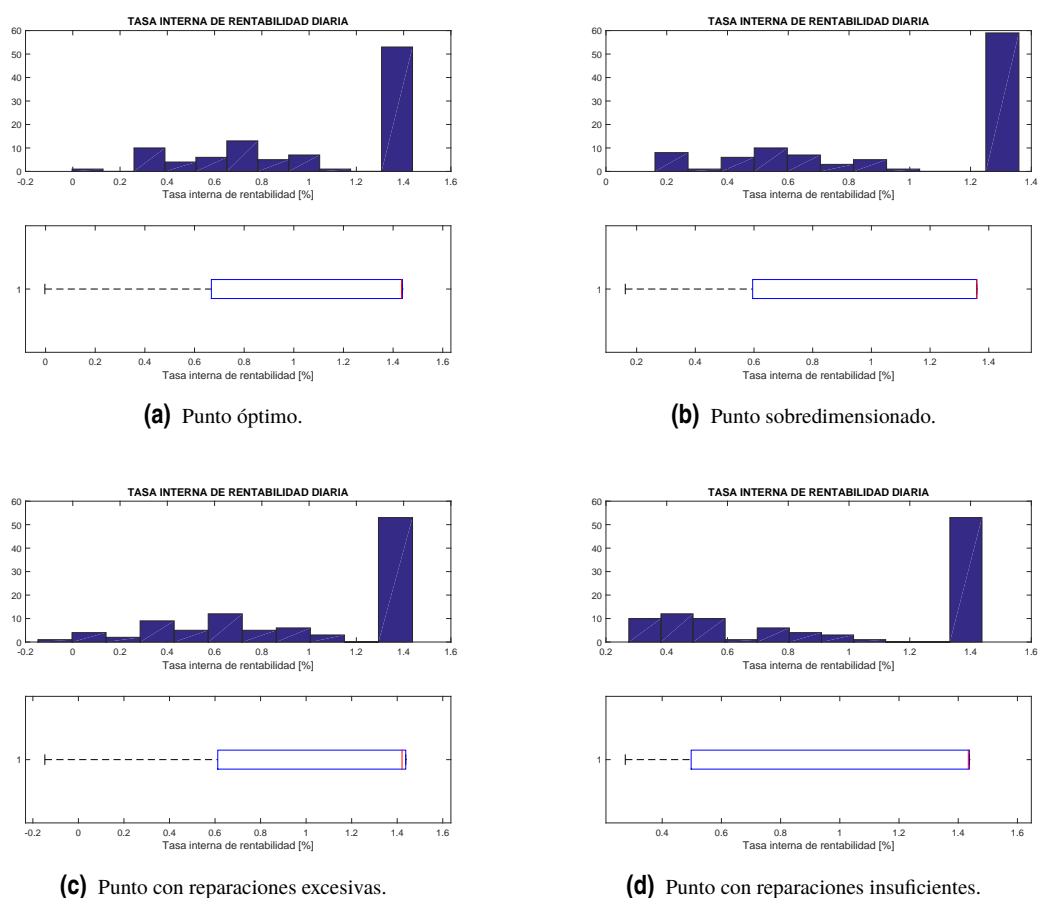


Figura 9.11 Distribuciones de la tasa interna de rentabilidad.

Tabla 9.15 Análisis frecuencial del periodo de amortización.

	Mínimo	Cuantil 5 %	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Cuantil 95 %	Máximo
Punto óptimo	-	0.23 años	0.23 años	0.23 años	0.51 años	0.73 años	0.75 años
Punto sobredimensionado	0.24 años	0.24 años	0.24 años	0.24 años	0.54 años	0.78 años	0.84 años
Punto con reparaciones excesivas	0.23 años	0.23 años	0.23 años	0.23 años	0.49 años	0.76 años	0.88 años
Punto con reparaciones insuficientes	0.23 años	0.23 años	0.23 años	0.23 años	0.74 años	0.79 años	0.81 años

Tabla 9.16 Estimación de los valores medios de algunas variables de interés para el estudio de la rentabilidad de la inversión.

	Valor actual neto medio			Tasa interna de rentabilidad media diaria			Periodo de amortización medio		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	1019.08 €	-0.05 €	31.00 €	1.061 %	-0.008 %	0.039 %	-	-	-
Punto sobredimensionado	1027.15 €	-1.81 €	33.50 €	1.027 %	-0.006 %	0.042 %	0.37 años	-0.00 años	0.02 años
Punto con reparaciones excesivas	992.92 €	-3.15 €	37.40 €	1.031 %	-0.000 %	0.053 %	0.36 años	-0.00 años	0.02 años
Punto con reparaciones insuficientes	894.37 €	-2.85 €	42.31 €	1.027 %	-0.002 %	0.039 %	0.42 años	0.01 años	0.03 años

Tabla 9.17 Ratio de Sharpe de la inversión para los tres casos considerados.

	Ratio de Sharpe
Punto óptimo	1.89
Punto sobredimensionado	1.87
Punto con reparaciones excesivas	1.67
Punto con reparaciones insuficientes	1.71

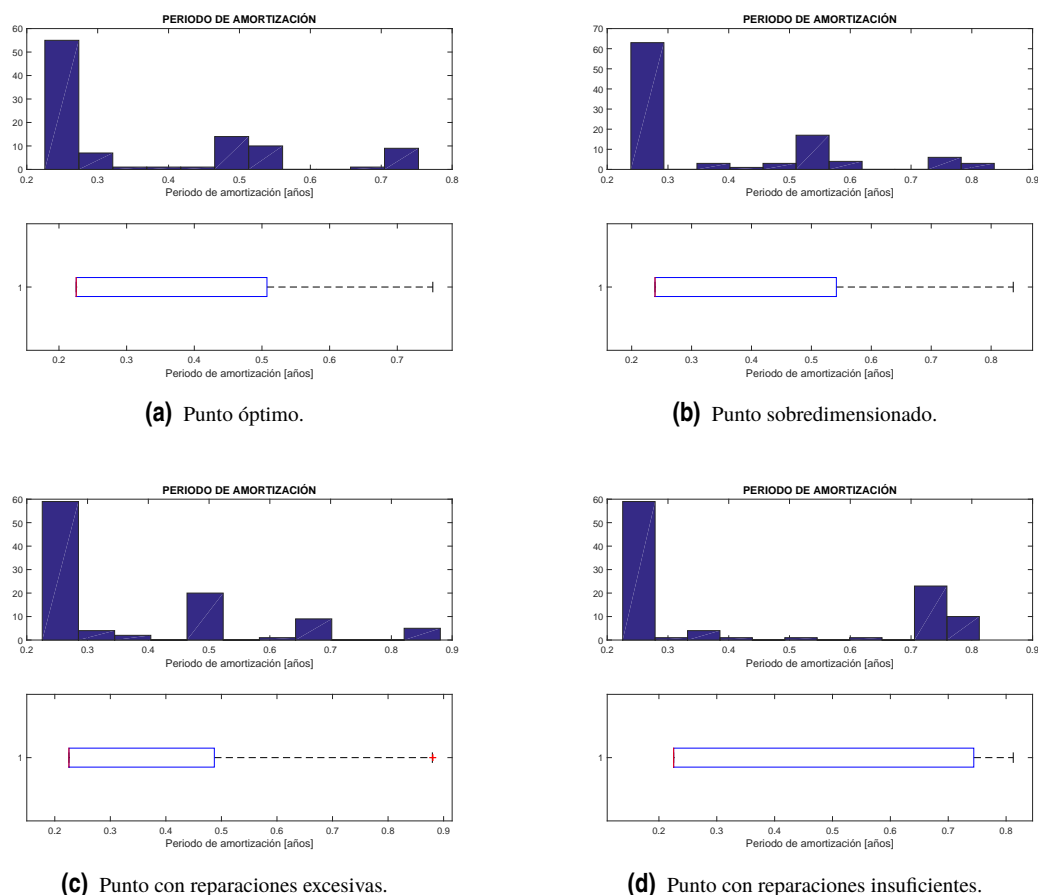


Figura 9.12 Distribuciones del periodo de amortización.

Para terminar, se puede comparar el proyecto aquí definido con el otro activo financiero, definido en términos de su tasa de retorno compuesta y su volatilidad, como ya se ha definido. Para el valor de los parámetros dados en la Tabla 9.2 se obtienen los valores que pueden verse en la Tabla 9.18.

Tabla 9.18 Análisis comparativo de la inversión.

	Fiabilidad comparada inversión			Índice de fiabilidad		
	Valor	Sesgo	Error estándar	Valor	Sesgo	Error estándar
Punto óptimo	51 %	−0.64 %	5.11 %	−0.31	−0.02	0.10
Punto sobredimensionado	54 %	0.50 %	4.22 %	−0.44	−0.02	0.08
Punto con reparaciones excesivas	53 %	−0.04 %	4.48 %	−0.38	0.00	0.10
Punto con reparaciones insuficientes	53 %	1.08 %	5.96 %	−0.39	−0.01	0.09

Las principales conclusiones que se desprenden son:

- El análisis de la rentabilidad del proyecto es similar al análisis del beneficio: se observa el mismo tipo de dependencias con respecto a las variables de diseño. No obstante, existen algunas interesantes observaciones al respecto:
 - La tasa interna de rentabilidad es mayor en el caso óptimo que en el caso sobredimensionado. Esto es debido al efecto de la capitalización: cuanto antes se disponga del dinero líquido, mejor. Dicho de otro modo, es preferible reparar las estructuras gastando lo mínimo posible para que los ingresos se capitalicen enseguida. El efecto de la capitalización también puede verse para el caso de reparaciones excesivas: conviene reparar las estructuras cuanto antes para disponer con inmediatez del valor monetarizado de la energía producida.

- Para el caso óptimo, se da que en algunos escenarios la estructura no se llega a amortizar en el periodo considerado
- Es notable señalar que para los casos más desfavorables, hay otros diseños que ofrecen más rentabilidad y se amortizan antes que el caso que más beneficio medio arroja, que a su vez, no tiene por qué coincidir con el óptimo del problema de optimización con restricciones. Por ello es importantísimo escoger adecuadamente el espíritu del problema.
- Si se valora la inversión en términos financieros utilizando el ratio de Sharpe para la rentabilidad, el punto óptimo es la mejor solución (gracias al valor de la tasa interna de rentabilidad), seguido del punto de sobredimensionamiento (por el descenso del riesgo asumido). EL caso con reparaciones insuficientes cierra la lista como la peor inversión en términos del ratio de Sharpe.
- Aunque todos los proyectos parecen ligeramente mejores que el otro activo sujeto a riesgo considerado (la fiabilidad comparada supera el 50 % en todos los casos) el riesgo inherente a todos ellos y la fuerte asimetría de las distribuciones consideradas hace que para todos los casos se obtenga un índice de fiabilidad negativo. Por supuesto, esto es debido a que el índice de fiabilidad es un buen indicador de la fiabilidad para distribuciones simétricas, especialmente para distribuciones normales.

9.6 Principales conclusiones

El análisis del sistema de paneles fotovoltaicos que se ha realizado en este último capítulo, a pesar de ser bastante académico y fundamental, ilustra la enorme potencia de la metodología presentada.

- Ella permite incorporar el riesgo a los sistemas mecánicos, bien como un fenómeno inherente a ellos, bien como un artificio conveniente para afrontar el desconocimiento de la realidad física. Al incorporar el riesgo, la optimización de sistemas resulta en un proceso complicado desde el punto de vista teórico y sobre todo computacional. Sin embargo, dar este paso merece enormemente la pena puesto que el ingeniero consigue muchas más palancas sobre las que actuar y le permite un análisis mucho más amplio de cualquier variable de interés.
- Al situar al problema en un marco de incertidumbre, la elección del espíritu es un paso fundamental: aquí se ha escogido el beneficio de explotación, pero se ha visto como elegir otras variables, como la energía producida, el número de reparaciones para reparaciones o el valor actual neto así como adoptar una postura diferente frente al riesgo (es decir, usar otro indicador como el valor esperado en lugar del valor en riesgo) pueden cambiar el punto de diseño óptimo. Aquí es muy importante que el ingeniero decida cuál es la variable que realmente interesa optimizar.
- Otra ventaja de situar el problema en un marco de incertidumbre es que, luego de una abstracción que deje de lado el propio sistema mecánico o energético, se puede hablar del mismo a efectos de proyecto o de activo de inversión, de cara a compararlo con otras tecnologías productivas u otros activos financieros.
- La cantidad de análisis que se pueden hacer sobre el sistema, una vez optimizado, es enorme. Aquí se han presentado unos pocos, referentes a la productividad, la gestión o la financiación. Todos y cada uno de ellos aportan una información que puede ser muy valiosa a la hora de la ejecución y la gestión: contratación de seguros, planes de financiación, líneas de crédito, gestión de las plantas, garantías técnicas y económicas...

En el caso concreto que se ha analizado, la metodología presentada ha ayudado a detectar tres fenómenos:

1. **En ocasiones, añadir elementos estructurales para aumentar el carácter hiperestático de la estructura es contraproducente.** Este fenómeno es independiente de si el sistema se estudia desde un marco determinista o estocástico, pero esta conclusión se ha obtenido gracias a la metodología que se ha seguido en los pasos de cálculo estructural, evaluando el fallo estructural y las consecuencias del mismo mediante un examen del núcleo de la matriz de rigidez.
2. **Tomar riesgos es en muchos casos positivo.** Este dogma casi fundamental de la teoría matemática de mercados financieros se presenta también en la ingeniería mecánica y el cálculo estructural. Si se pretende una buena utilización de los recursos o la búsqueda de una gran rentabilidad, puede

ser pertinente diseñar estructuras menos robustos cuyo fallo sea razonablemente poco probable y razonablemente barato (es decir, tenga un riesgo económico bajo). El compromiso entre costes iniciales y costes de reparación no tiene por qué plantearse en un contexto de incertidumbre, pero si los principales agentes que determinan las solicitaciones estructurales son ambientales, no existe alternativa que no pase por un planteamiento probabilístico.

- 3. Algunas variables de diseño u operación tienen un efecto no monótono sobre los beneficios.** En este caso se ha visto claramente con el periodo entre reparaciones. La detección de los valores óptimos de estas variables sólo es posible calcularlos si se plantea el problema en un marco integral probabilista como el que se ha presentado. El hecho de realizar simulaciones cuasi-estáticas con estructuras evolutivas basadas en un modelo de agentes de dos escalas temporales ha permitido detectar el efecto de agrupación de los fenómenos meteorológicos de riesgo, desprendiéndose de aquí patrones de gestión y mantenimiento más adecuados. De nuevo esto no hubiese sido posible sin unas herramientas potentes para la simulación de agentes meteorológicos.

Conclusiones

Se finaliza este documento presentando las principales conclusiones del trabajo realizado. En primer lugar se presentarán de forma resumida los resultados obtenidos, tanto particulares como metodológicos. A continuación se analizarán estos resultados desde una perspectiva científica, poniendo el acento en el carácter innovador, el valor añadido generado o la metodología genuina de todos los trabajos que se han llevado a cabo. Para terminar, se expondrán futuras líneas de investigación o desarrollo que pueden derivar de este estudio, orientadas a solucionar los problemas que se han ido viendo a lo largo del texto.

Resumen de resultados

A lo largo del documento se ha llegado a un buen número de resultados. Se puede distinguir entre dos tipos de resultados: los metodológicos y los particulares. Como este documento ha pretendido ser lo más general posible, la mayoría de resultados son metodológicos:

1. Se ha definido una estrategia para el estudio de sistemas en un marco de incertidumbre que tenga en cuenta un paradigma de escasez. Esto significa que los problemas planteados se resuelven siempre desde una perspectiva de optimización de recursos (sean económicos, materiales, productivos...). Presentar los sistemas de estudio desde el punto de vista probabilista permite afrontar cualquier tipo de sistema, siendo sus variables de entrada conocidas, parcialmente conocidas o desconocidas.
2. En particular, se ha definido una metodología para, mediante simulaciones cuasi - estáticas, evaluar estructuras que pueden evolucionar en función de la historia de cargas a lo largo del tiempo. Dicha metodología permite no sólo detectar los fallos estructurales o mecánicos sino evaluar cualquier tipo de consecuencias (colapsos locales y globales, costes asociados a los colapsos...).
3. Dicha metodología es muy útil tanto para optimizar los diseños de sistemas mecánicos en base a variables que se deseen maximizar o minimizar, como para analizar el funcionamiento del mismo (su evolución, su producción, sus paradas...) y poder tomar decisiones sobre la operación y el mantenimiento.
4. Más aún, esta metodología permite dar un paso más en la abstracción, para situar el sistema en un contexto de productos sujetos a riesgo. Esto permite no sólo poder trazar estrategias de financiación, sino implementar carteras de productos, diseñar coberturas y definir una estrategia financiera global.

Para el tipo de sistema estudiado, sometido a agentes climáticos (en el caso del documento, el viento), se han desarrollado modelos probabilísticos específicos para caracterizar las variables ambientales:

1. Se ha definido el modelo C - V, que consiste en un modelo multiescala temporal, multivariado, que refleja por un lado la variabilidad de la velocidad del viento a escala meteorológica y las fluctuaciones turbulentas en las cargas sobre la estructura. El modelo concatena a su vez dos modelos probabilísticos, uno para cada escala:
 - a) Para la velocidad del viento, se usa un modelo estacionario mixto pentaparamétrico que trata de captar la estadística tanto del régimen central como de las colas de la distribución. La dependencia temporal, además, se trata mediante la teoría de modelos vectoriales autorregresivos. Los ajustes demuestran ser extremadamente adecuados para la caracterización del régimen central y estiman con mucha verosimilitud el régimen extremal.

- b) Para las fluctuaciones turbulentas, se usa un modelo multidimensional, triparamétrico en cada dimensión, que no es prisionero de la hipótesis de normalidad y por lo tanto permite una mejor caracterización de la estadística de orden superior y las colas de la distribución. La dependencia entre las variables se trata adecuadamente mediante los coeficientes de correlación y la dependencia temporal también mediante un modelo autorregresivo. Simulaciones mediante *bootstrapping* paramétrico demuestran la idoneidad del modelo, y además ofrecen una alternativa barata y rápida para la generación de series sintéticas de cargas estructurales.
 - c) Un análisis de la incertidumbre del modelo revela el impacto de cada una de las variables consideradas en las cargas, tanto en tendencia central, como en dispersión y comportamiento extremo. Se ha puesto de manifiesto que la velocidad del viento tiene un impacto decisivo, en todos los aspectos, y que considerarla constante puede tener consecuencias dramáticas. Los coeficientes de fuerza, por otro lado, no tienen tanto impacto (para estadísticos de orden bajo, para valores extremos el error puede llegar a rondar el 40 %, a pesar de que introducen el carácter multivariable en la distribución de probabilidad y por tanto elementos como la simultaneidad y compatibilidad de las cargas. A pesar de todo, se demuestra que ciertos modelos "simplificados" basados en una única realización, sin hipótesis distribucionales, reproducen de forma más que razonable las series de cargas.
2. Se ha utilizado exitosamente la metodología planteada para la optimización y el análisis de una estructura de paneles fotovoltaicos. Se han detectado varias cosas destacables
- a) La optimización está muy ligada a dos aspectos: la variable que se desea optimizar (beneficio, producción, número de reparaciones...) y la actitud que se adopta frente al riesgo. En cualquier caso, considerar el sistema en un marco de incertidumbre puede aumentar enormemente los beneficios de explotación obtenidos, facilitar enormemente la gestión de plantas de producción energética o maximizar la producción, sin perder de vista otros requisitos fundamentales contractuales, sociales o estratégicos.
 - b) Más en particular, para el ejemplo considerado, se ha visto que el diseño de una estructura menos robusta mejoraba los beneficios obtenidos y que el añadir grados de hiperestaticidad a una estructura puede resultar contraproducente. Por último, el control de la planta y la frecuencia de las reparaciones debe diseñarse de forma cuidadosa, no solo de acuerdo con las exigencias sobre el rendimiento del sistema sino teniendo muy en cuenta los condicionantes ambientales.
 - c) El análisis del sistema, en condiciones de incertidumbre, arroja valiosísima información sobre aspectos relativos al beneficio, el rendimiento y la financiación de los proyectos. Así, en el caso analizado, esta metodología permite detectar el efecto de la capitalización monetaria para proyectos en los que existe cierta flexibilidad en el diseño de los instantes de pérdidas y ganancias, así como el carácter no estacionario de algunas variables ambientales (en este caso la única variable no ambiental era el precio de casación de la energía), especialmente si éstas están vinculadas a mercados estacionales.

En definitiva, se ha dotado al ingeniero de herramientas cuantitativas para el diseño y el análisis de sistemas en condiciones de incertidumbre, en un contexto de escasez, sujetos a agentes ambientales, que es lo que se pretendía.

Principales aportaciones científicas

Como principales aportaciones científicas originales, puede destacarse lo siguiente:

1. La definición y validación de un modelo probabilístico para la caracterización multivariable de los coeficientes de fuerzas sobre estructuras mecánicas, a partir de al menos un cálculo previo de CFD o de una serie de un túnel de viento. El modelo para la velocidad del viento no es original, puesto que está basado los trabajos de investigadores de la Universidad de Granada, pero complementa el modelo para los coeficientes.
2. El estudio de la incertidumbre del modelo, así como la manifestación de los problemas que conllevan los métodos usuales, no probabilísticos, para el cálculo de cargas estructurales, que desprecian la incertidumbre, en mayor o menor medida, de las variables implicadas.

3. El diseño de un algoritmo, y la implementación en código MATLAB® para el análisis de estructuras cuyo comportamiento evoluciona en función de la historia de cargas y en el que se detecta de forma automática el fallo estructural y sus consecuencias físicas. El código, además de estar basado en un algoritmo robusto que puede utilizarse directamente en un marco de simulaciones realizadas por métodos de tipo Montecarlo, es modulable y configurable, para que pueda considerarse cualquier estructura de barras articuladas, bidimensional, cuyos posibles fallos estructurales se definan en función del instante considerado (plastificación, fractura, inestabilidad, contacto...). No obstante, la implementación para otro tipo de tipologías estructurales (vigas, placas, láminas o medios continuos en general) y casos tridimensionales es inmediata siempre que se disponga de un software de elementos finitos en el que se tiene acceso a la matriz de rigidez del sistema en cada instante de tiempo y podría incluirse fallos mecánicos vinculados a la historia de cargas (fatiga, viscoelasticidad...).
4. El tratamiento de sistemas mecánicos desde un punto de vista puramente financiero y la consideración de estos sistemas como si se tratase de un activo financiero como cualquier otro, permitiendo el uso de toda la potente teoría de matemáticas de los mercados financieros.

Futuras líneas de investigación

Como futuras líneas de investigación que emanen del trabajo realizado, cabe destacar las siguientes:

- Tratar de reducir los costes computacionales de la metodología integral, que está basada en un proceso de varios bucles anidados y se ve abocada a la maldición de la dimensionalidad. Para ello, existen dos opciones:
 - Mejorar el algoritmo de optimización basado en el catálogo, usando técnicas de programación entera, ramificación y poda, algoritmos heurísticos o redes neuronales.
 - Mejorar el algoritmo de simulación cuasi-estática de estructuras, utilizando técnicas no incrementales, como pueden ser métodos de reducción de orden. Esto es un desafío mayúsculo, puesto que al tratar con estructuras que dependen de la historia de cargas considerada, parece difícil diseñar un método de resolución no incremental.
- Explorar los fundamentos teóricos del modelo probabilístico utilizado para caracterizar la turbulencia. Esto es, estudiar la física del fenómeno y relacionarlo con la estadística. Esto dotaría al modelo probabilístico multivariable que caracteriza los coeficientes de fuerzas de la solidez necesaria para que pueda ser generalizado de forma sistemática a otras estructuras y condiciones de carga.
- Introducir en los modelos estadísticos para variables ambientales la no estacionariedad. Es sabido que los fenómenos meteorológicos tienen un marcado carácter estacional y que por lo tanto existen fluctuaciones en la estadística del orden de días, estaciones e incluso años. Dichos modelos existen y sólo haría falta introducirlos adecuadamente en la metodología planteada.
- Generalizar todo lo aquí estudiado a cálculos dinámicos. Para ello, sería esencial:
 - Encontrar modelos matemáticos adecuados, más allá de los modelos autorregresivos, para caracterizar la dependencia temporal de las diferentes variables implicadas. Para ello, hay dos posibilidades: tirar de matemáticas y acudir a la teoría de procesos estocásticos (cadenas de Markov, cálculo estocástico...) o tirar de estadística y entrar en modelos no lineales para la dependencia temporal (redes neuronales, cópulas...).
 - Diseñar métodos algorítmicos para el cálculo de estructuras en régimen dinámico (es decir, sin despreciar los efectos inerciales y de amortiguamiento) y el posterior tratamiento de las ecuaciones de verificación. De nuevo aquí, el carácter evolutivo de la estructura es un obstáculo enorme.

Valoración final

A lo largo de este trabajo se ha realizado un esfuerzo por plantear un marco metodológico al análisis de sistemas que permitan por un lado incorporar la incertidumbre de los agentes ambientales y por otro permitir el diseño inteligente y racional, buscando la optimalidad, en un sentido abstracto y genuino del objetivo que

pretenda llevarse a cabo.

Puede decirse, por tanto, que este estudio ha enriquecido considerablemente el bagaje científico y la formación del autor; el enfrentarse a un problema real con un marcado carácter aplicado y pensar en una estrategia para establecer modelos analíticos es, en esencia, el problema fundamental del ingeniero. Aquí, se han utilizado modelos teóricos y algunas evidencias basadas en la simulación numérica. Las herramientas utilizadas cubren un espectro amplio en teoría de la probabilidad, estadística, análisis cuantitativo del riesgo, programación estocástica para las cuales la formación como matemático del autor ha resultado indispensable, pero por otro lado, el carácter puramente aplicado al ámbito de la Ingeniería Mecánica sitúa este trabajo como perfecto cierre al Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica, del cual este trabajo es la culminación.

En la actualidad, en la que resulta cada vez más importante seguir políticas energéticas sostenibles (la implicación de las empresas, como Abengoa, y de las universidades, como la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla es buena prueba de ello), los ingenieros deben usar todo su ingenio para poner la ciencia al servicio del hombre de hoy y del futuro.

Apéndice A

Algunos modelos y resultados estadísticos

A.1 Espacios de probabilidad y variables aleatorias

A.1.1 Espacios de probabilidad

Nociones preliminares

Un **experimento aleatorio** tiene asociado los siguientes elementos:

- **Espacio muestral:** Conjunto Ω de todos los resultados (conceptualmente) posibles.
- **Realizaciones:** Elementos $\omega \in \Omega$ del espacio muestral. Llamados también resultados.
- **Sucesos:** Subconjuntos $A \subseteq \Omega$ del espacio muestral para los cuales está definida la probabilidad.

La mayor parte de espacios muestrales pertenecen a una de las siguientes categorías:

- Conjunto finito: $\Omega = \{1; 2; \dots; n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Conjunto infinito numerable: $\Omega = \mathbb{N}$ o $\Omega = \mathbb{Z}$.
- Conjunto no numerable: $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = [0; 1]$, $\Omega =]0; +\infty[$.
- Conjunto finito de replicaciones: $\Omega = \Omega_0^n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_0, i = 1, \dots, n\}$.
- Conjunto infinito de replicaciones: $\Omega = \Omega_0^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \omega_i \in \Omega_0, i \in \mathbb{N}\}$.
- Espacios de funciones: $\Omega = \mathcal{C}[0; 1]$.

Una **sigma-álgebra** sobre Ω es una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω tal que:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces el complementario $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_i \in \mathcal{F}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Dada una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω , existe la menor sigma-álgebra que contiene a \mathcal{C} (en el sentido que cualquier sigma-álgebra que contenga a \mathcal{C} , también contendrá la contiene a ella). Se denotará generalmente por $\sigma(\mathcal{C})$ y se llamará **sigma-álgebra generada por \mathcal{F}** .

En particular $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathbb{R})$ es la **sigma-álgebra de Borel** sobre \mathbb{R} .

Asociados a un experimento aleatorio siempre tendremos un espacio muestral Ω y una sigma-álgebra \mathcal{F} . El par (Ω, \mathcal{F}) se denomina **espacio probabilizable**.

Una **probabilidad** sobre el espacio probabilizable (Ω, \mathcal{F}) es una aplicación $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.

3. Cualesquiera que sean A_1, A_2, \dots disjuntos dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), se cumple:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A la terna (Ω, \mathcal{F}, P) se le llama **espacio de probabilidad**. La interpretación más plausible de $P(A)$ es como la tendencia de la frecuencia con la que ocurre A bajo replicaciones independientes del experimento aleatorio.

Teorema A.1.1 (Propiedades de la probabilidad) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ son disjuntos dos a dos, $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.
3. Si $A \in \mathcal{F}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
6. Si $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. Si $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
8. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Sean $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ y $A \subseteq \Omega$. El **límite superior** de (A_n) es el conjunto de los $\omega \in \Omega$ tales que $\omega \in A_n$ para un número infinito de valores de n .

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

El **límite inferior** de (A_n) es el conjunto de los $\omega \in \Omega$ tales que $\omega \in A_n$ para todos los valores de n excepto a lo sumo un número finito.

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

La sucesión (A_n) converge a A ($A_n \rightarrow A$ o $\lim A_n = A$) si $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = A$. La sucesión (A_n) converge de forma creciente (decreciente) a A si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ ($A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$) y además $\lim A_n = A$. En ese caso $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ($A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$). Se escribirá $A_n \uparrow A$ ($A_n \downarrow A$).

Teorema A.1.2 (Límites en orden) Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces:

1. Si $A_n \uparrow A$, entonces $P(A_n) \rightarrow P(A)$.
2. Si $A_n \downarrow A$, entonces $P(A_n) \rightarrow P(A)$.

Teorema A.1.3 (Lema de Borell - Cantelli) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Si $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ entonces $P(\limsup A_n) = 0$.

Un suceso A es **casi seguro** si se verifica que $P(A) = 1$ y **imposible** si $P(A) = 0$.

Probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Consideremos como espacio probabilizable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y P una probabilidad sobre dicho espacio. La **función de distribución** de P es la función $F_P : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ definida por $F_P(t) = P((-\infty; t])$. Puede comprobarse que F_P define unívocamente P , es decir, si $F_P = F_{P'}$, entonces $P = P'$.

Teorema A.1.4 Si F_P es la función de distribución de P , entonces:

1. F_P es creciente: $t_1 \leq t_2 \Rightarrow F_P(t_1) \leq F_P(t_2)$.
2. F_P es continua por la derecha: $\lim_{t \rightarrow a^+} F_P(t) = F_P(a)$.
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_P(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_P(t) = 1$.

Teorema A.1.5 (Radon - Nykodin) Sea F una función creciente, continua por la derecha y tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_P(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_P(t) = 1$. Entonces, existe una única probabilidad P tal que $F = F_P$.

Una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es **discreta** si existe un conjunto numerable C tal que $P(C) = 1$.

Teorema A.1.6 Sea P una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- P es discreta.
- Existe un conjunto numerable de números reales $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y valores p_i para cada i y $\sum_i p_i = 1$ tales que $P = \sum_i p_i \mathcal{E}_{t_i}$, siendo $\mathcal{E}_x(A) = 1$ si $x \in A$ y $\mathcal{E}_x(A) = 0$ si $x \notin A$.
- Existe un conjunto numerable de números reales $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y valores p_i para cada i y $\sum_i p_i = 1$ tales que $F_P = \sum_i p_i \mathbb{I}_{[-\infty; t_i]}$, siendo $\mathbb{I}_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\mathbb{I}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es **absolutamente continua** si existe una función positiva $f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cada intervalo $]a; b]$.

$$P(]a; b]) = \int_{]a; b]} f_P(t) dt = \int_a^b f_P(t) dt$$

A la función f_P se la denomina **función de densidad** de P y es única salvo a lo sumo en su definición para conjuntos de medida única.

Teorema A.1.7 Sea P una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- P es absolutamente continua.
- Existe una función positiva $f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\int_{\mathbb{R}} f_P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_P(t) dt = 1$ y

$$F_P(t) = \int_{-\infty}^t f_P(s) ds$$

Probabilidad condicionada

Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

Sean A y B sucesos. La **probabilidad condicionada de B dado A** se define como: Siempre que $P(A) > 0$,

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si por el contrario $P(A) = 0$,

$$P_A(B) = P(B|A) = P(B)$$

Se demuestra que $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$ es un espacio de probabilidad con $P_A(B) = P(B|A), \forall B \in \mathcal{F}$.

Teorema A.1.8 (Regla de la multiplicación) Sean A_1, \dots, A_n sucesos tales que $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Entonces

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|\cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Teorema A.1.9 (Teorema de la Probabilidad Total) Sea $\{A_1, A_2, \dots\}$ una partición numerable disjunta de Ω . Entonces, para cada suceso B ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

Teorema A.1.10 (Teorema de Bayes) Sea $\{A_1, A_2, \dots\}$ una partición numerable disjunta de Ω . Entonces, para cada suceso B con $P(B) > 0$ y cada j ,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Se dice que dos sucesos A y B son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. En general, los sucesos A_1, \dots, A_n son independientes si $P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ para $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Una colección infinita de sucesos es independiente si cualquier subcolección finita de entre ellos forma un conjunto de sucesos independientes.

Teorema A.1.11 *Los sucesos A_1, \dots, A_n son independientes si y sólo si los sucesos A_1^c, \dots, A_n^c son independientes.*

Teorema A.1.12 (Lema de Borel - Cantelli) *Sean A_1, A_2, \dots sucesos independientes tales que $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = +\infty$. Entonces $P(\limsup_n A_n) = 1$.*

A.1.2 Variables y vectores aleatorios

Variables aleatorias

Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) asociado a un experimento aleatorio.

Una **variable aleatoria** es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Se demuestra que X es variable aleatoria si y sólo si $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq t\} = \{X \leq t\} = X^{-1}([-\infty; t]) \in \mathcal{F}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Un **vector aleatorio d -dimensional** es una función $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que cada componente X_i , $i = 1, \dots, d$ es una variable aleatoria.

Dado un conjunto infinito T , un **proceso estocástico** (con conjunto índice T) es una colección $\{X_t\}_{t \in T}$, donde X_t es una variable aleatoria $\forall t \in T$. Cuando T es el conjunto numerable \mathbb{N} , se dice que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (X_n)$ es una sucesión de variables aleatorias. Cuanto $T = \mathbb{R}^+$, se dice que $\{X_t\}_{t \geq 0} = \{X_t\}$ es un proceso estocástico a tiempo continuo.

Teorema A.1.13 *Sean X e Y variables aleatorias. Entonces:*

1. $aX + bY$ es una variable aleatoria $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. $X \vee Y = \max(X, Y)$ y $X \wedge Y = \min(X, Y)$ son variables aleatorias.
3. XY es una variable aleatoria.
4. Siempre que $Y(\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in \Omega$, $\frac{X}{Y}$ es una variable aleatoria.

Teorema A.1.14 *Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias. Entonces:*

1. $\sup_n X_n$ es una variable aleatoria.
2. $\inf_n X_n$ es una variable aleatoria.
3. Si $X(\omega) = \lim_n X_n(\omega)$ existe $\forall \omega \in \Omega$, X es una variable aleatoria.

Teorema A.1.15 *Sean X_1, \dots, X_d variables aleatorias y $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible ($g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) Entonces $Y = g(X_1, \dots, X_d)$ es una variable aleatoria.*

Una **variable aleatoria simple** es una variable aleatoria que toma un conjunto finito de valores, es decir $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{A_i}$.

Dada una variable aleatoria X , la función $P^X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $P^X(B) = P(X^{-1}(B))$ es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Así, se denomina:

- Distribución de probabilidad de X a la función de probabilidad P^X . Si $B = [a; b]$ se escribe $P^X([a; b]) = P(X^{-1}([a; b])) = P[a \leq X \leq b] = P(\{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) \leq b\})$.
- Función de distribución de X a la función $F_X = F_{P^X}$. De esta forma $F_X(x) = P^X([-\infty; x]) = P[X \leq x]$.

Del mismo modo se dice que una variable aleatoria X es discreta o absolutamente continua si P^X lo es. Las variables aleatorias X e Y son idénticamente distribuidas si $P^X = P^Y$ o equivalentemente $F_X = F_Y$ y se escribe $X \stackrel{d}{=} Y$.

Dado un vector aleatorio d -dimensional $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, la función $P^{\mathbf{X}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $P^{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X}^{-1}(B))$ es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Así, se denomina:

- Distribución de probabilidad de \mathbf{X} a la función de probabilidad $P^{\mathbf{X}}$. Si $B = \prod_{i=1}^n [a_i; b_i]$ se escribe $P^{\mathbf{X}}(\prod_{i=1}^n [a_i; b_i]) = P(X^{-1}(\prod_{i=1}^n [a_i; b_i])) = P[a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \dots, a_d \leq X_d \leq b_d] = P(\{\omega \in \Omega | a_d \leq X_d(\omega) \leq b_d, i = 1, \dots, d\})$.
- Función de distribución de \mathbf{X} o función de distribución conjunta de (X_1, \dots, X_d) a la función $F_{\mathbf{X}} = F_{P^{\mathbf{X}}}$. De esta forma $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = P^{\mathbf{X}}(\prod_{i=1}^d (-\infty; x_i]) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d]$.

Si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ es un vector aleatorio d -dimensional, entonces para cada i y x .

$$F_{X_i}(x) = \lim_{x_j \rightarrow +\infty (j \neq i)} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

Se dice que un vector aleatorio d -dimensional $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ es discreto si existe un subconjunto numerable $C \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $P(\mathbf{X} \in C) = 1$. Se demuestra que esto es equivalente a que X_i sea una variable aleatoria discreta $\forall i = 1, \dots, d$.

Se dice que un vector aleatorio d -dimensional $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ es absolutamente continuo si existe una función $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ (llamada función de densidad conjunta de (X_1, \dots, X_n)) tal que:

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_d$$

Si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio absolutamente continuo, entonces cada X_i es una variable aleatoria absolutamente continua (pero no reciprocamente) y su función de densidad es:

$$f_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} dy_d$$

Teorema A.1.16 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X . Sea g una función Borel medible de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua y estrictamente creciente. Sea $h = g^{-1}$ y $Y = g(X)$. Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_X(h(x))$.

Teorema A.1.17 (Transformación de variables aleatorias absolutamente continuas por funciones derivables) Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad f_X . Sea g una función diferenciable para todo x y supongamos que $g'(x)$ es continua y distinta de 0 en casi todos los valores de x (respecto de la probabilidad P^X). Además para cualquier número real y se verifica una de las dos condiciones siguientes:

- Existe un entero positivo $n = n(y)$ y números reales $x_1 = x_1(y), \dots, x_n = x_n(y)$ tales que:

$$g(x_k(y)) = y, \quad g'(x_k(y)) \neq 0, \quad k = 1, \dots, n$$

- No existe ningún x tal que $h(x) = y, g'(x) \neq 0$, en cuyo caso se considera $n = n(y) = 0$.

Entonces $Y = g(X)$ es una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad viene dada por

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^n f_X(x_k(y)) |g'(x_k(y))|^{-1} \text{ si } n > 0; \quad 0 \text{ si } n = 0$$

Teorema A.1.18 (Transformación de vectores aleatorios absolutamente continuos por funciones derivables) Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vector aleatorio d -dimensional absolutamente continuo con función de densidad $f_{\mathbf{X}}$. Sea $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función Borel medible para la cual existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $P(\mathbf{x} \in U) = 1$, es biyectiva sobre U , diferenciable y $Jg(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in U$ ($Jg(\mathbf{x})$ es el Jacobiano de g evaluado en \mathbf{x}) Sea $h = g^{-1}$.

Entonces $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ es un vector aleatorio absolutamente continuo y cuya función de densidad es

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(h(\mathbf{y})) |Jh(\mathbf{y})| \quad \mathbf{y} \in g(U)$$

Independencia

Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) asociado a un experimento aleatorio.

Las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son **independientes** si $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$, $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$. Un conjunto infinito de variables aleatorias es independiente si cualquier subconjunto finito de ellas forma un conjunto de variables independientes.

Si un conjunto de variables aleatorias son independientes y tienen la misma función de distribución, se dice que son **independientes e idénticamente distribuidas** y se denota mediante *i.i.d.*

Teorema A.1.19 Las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ cualesquiera que sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Teorema A.1.20 Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias discretas que toman valores en el conjunto numerable C . Las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$ cualesquiera que sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Teorema A.1.21 Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio absolutamente continuo. Las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ cualesquiera que sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. En particular, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias absolutamente continuas, entonces $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio absolutamente continuo.

Se puede relacionar el concepto de independencia de variables aleatorias con el de independencia de sucesos. En efecto, los sucesos A_1, \dots, A_n son independientes si y sólo si sus funciones indicadoras \mathbb{I}_{A_i} son independientes. Una colección infinita de sucesos es independiente si cualquier subcolección finita forma un conjunto de sucesos independientes.

Cuantiles

Dada una variable aleatoria X y su función de distribución F_X . Si $p \in]0; 1[$, un valor de x tal que $F_X(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t) = P(X < x) \leq p$ y $F_X(x) = P(X \leq x) \geq p$ se denomina **un cuantil** de orden p de la distribución. La función $Q :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $Q_X(p) = \min\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$ se denomina **función cuantil** de la variable X .

Teorema A.1.22 (Propiedades de la función cuantil) Sea X una variable aleatoria, F_X su función de distribución y Q_X su función cuantil.

- Q_X es creciente en $]0; 1[$.
- $Q_X(F_X(x)) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) < 1$. $F_X(Q_X(p)) \geq p$, $\forall p \in]0; 1[$.
- Q_X es continua por la izquierda ($Q_X(p^-) = Q_X(p)$).
- $\forall x \in \mathbb{R}$ y $p \in]0; 1[$, $Q_X(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$.
- Si X es una variable absolutamente continua, $Q_X = F_X^{-1}$.

Algunos valores de los cuantiles tienen un nombre especial. Así, si $p = 0.5$, un cuantil correspondiente se denomina **mediana** y se denota mediante $\bar{m}(X)$, si $p = 0.25$ y $p = 0.75$, los cuantiles correspondientes se denominan **primer cuartil** y **tercer cuartil** respectivamente y se denotan mediante q_1 y q_3 . Si $p = q/100$, a un valor correspondiente a p se le denomina **percentil de nivel q** y se denota mediante p_q . Si los cuantiles son únicos, el valor $iqr(X) = q_3 - q_1$ se denomina **intervalo intercuartil**.

A.1.3 Esperanza matemática

Nociones preliminares

Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) asociado a un experimento aleatorio. Sea una variable aleatoria simple $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$ con A_i , $i = 1, \dots, n$ partición de Ω . La **esperanza** de X se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP = \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$$

Teorema A.1.23 (Propiedades de la esperanza de variables aleatorias simples) Sea X una variable aleatoria simple

1. $\mathbb{E}[X]$ está bien definida no dependiendo de la representación de X (en el sentido de la teoría de la medida).

2. $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A] = P(A)$.
3. $\mathbb{E}[c] = c$.
4. (Linealidad) Si X, Y son variables aleatorias simples y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aX + bY$ es una variable aleatoria simple y $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.
5. (Monotonía) Si X, Y son variables aleatorias simples tales que $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Para cualquier variable aleatoria $X \geq 0$, existe una sucesión de variables aleatorias simples $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ tales que $(X_n(\omega)) \rightarrow X(\omega), \forall \omega \in \Omega$, de modo que puede definirse la esperanza matemática para variables aleatorias positivas mediante $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] \leq +\infty$.

Teorema A.1.24 (Propiedades de la esperanza de variables aleatorias positivas) Sea X una variable aleatoria positiva.

1. $\mathbb{E}[X]$ está bien definida ya que de la monotonía de (X_n) se desprende la de $(\mathbb{E}[X_n])$ y el límite existe en \mathbb{R}^+ y además el límite no depende de la sucesión que aproxima a X .
2. (Linealidad) Si X, Y son variables aleatorias positivas y $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $aX + bY$ es una variable aleatoria positiva y $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.
3. (Monotonía) Si X, Y son variables aleatorias positivas tales que $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Teorema A.1.25 (Lema de Fatou) Sea $X_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Teorema A.1.26 (Teorema de la convergencia monótona) Sean X, X_1, X_2, \dots variables aleatorias positivas tales que $X_1 \leq X_2 \leq \dots$ y $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega), \forall \omega \in \Omega$. Entonces $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$.

El operador esperanza

Sea finalmente X una variable aleatoria cualquiera, sean $X^+ = \max\{X, 0\}$ y $X^- = -\min\{X, 0\}$, de forma que $X = X^+ - X^-$ y $|X| = X^+ + X^-$. X es (**absolutamente**) **integrable** si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$. Para variables aleatorias integrables se define la esperanza como $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$.

Teorema A.1.27 (Propiedades de la esperanza de variables aleatorias) Sea X una variable aleatoria integrable.

1. $\mathbb{E}[X]$ está bien definida y coincide con el valor de la esperanza definido para variables aleatorias simples y positivas.
2. (Linealidad) Si X, Y son variables aleatorias integrables y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aX + bY$ es una variable aleatoria integrable y $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.
3. (Monotonía) Si X, Y son variables aleatorias tales que $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.
4. (Acotación) Si X es una variable aleatoria integrable, $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.

Teorema A.1.28 (Teorema de la convergencia dominada) Sean X, X_1, X_2, \dots variables aleatorias integrables tales que $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega), \forall \omega \in \Omega$ y supongamos que existe Y variable aleatoria integrable tal que $|X_n| \leq Y, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$.

Como consecuencia de todo lo anterior, el conjunto de variables aleatorias integrables es un espacio vectorial normado denotado mediante L^1 con norma $\|\cdot\| : L^1 \rightarrow \mathbb{R}^+, \|X\| = \mathbb{E}[|X|]$.

Teorema A.1.29 (Teorema de la transferencia) Sea $X \in L^1$, y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Borel - medible, positiva, o tal que $g(X) \in L^1$ $\mathbb{E}[X]$, entonces $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP^X = g(x) \int_{\mathbb{R}} dF_X$. La primera integral es una integral en el sentido de Lebesgue y la segunda en el sentido de Stieltjes.

Teorema A.1.30 Sean X e Y variables aleatorias independientes y sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función Borel - medible. Entonces

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dF_X dF_Y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dF_X \right) dF_Y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dF_Y \right) dF_X$$

En particular, si X_1, X_2 son variables aleatorias independientes y $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son positivas, Borel - medibles o tales que $g_1(X_1), g_2(X_2) \in L^1$, entonces $\mathbb{E}[g_1(X_1)g_2(X_2)] = \mathbb{E}[g_1(X_1)]\mathbb{E}[g_2(X_2)]$

El operador esperanza puede verse como un funcional lineal del espacio de funciones de distribución F_X que caracterizan las variables aleatorias integrables, sobre \mathbb{R} , $\mathbb{E} : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Para variables aleatorias absolutamente continuas se tiene $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$ y para variables aleatorias discretas se tiene $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} g(x_n) p_X(x = x_n)$. Las dos expresiones anteriores muestran que el operador esperanza puede ser visto como un producto escalar.

La **esperanza de X sobre el suceso A** es el valor $\mathbb{E}[X : A] = \int_A X dP = \mathbb{E}[X \mathbb{I}_A]$ y la **esperanza de X condicionada a A** es $\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}[X : A]$.

Desigualdades y espacios L^p

Sea $1 \leq p < +\infty$. Sea L^p el conjunto de variables aleatorias X tales que $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$.

Teorema A.1.31 (Desigualdad de Hölder) Sean $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $X \in L^p$ y $Y \in L^q$. Entonces $XY \in L^1$ y

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}$$

Como corolarios, se tiene:

Teorema A.1.32 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean $X, Y \in L^2$. Entonces $XY \in L^1$ y

$$\mathbb{E}[|XY|]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$$

Teorema A.1.33 (Desigualdad de Lyapunov) Sea $1 \leq r \leq s$. Entonces $L^s \subseteq L^r$ y para $X \in L^s$:

$$\mathbb{E}[|X|^r]^{1/r} \leq \mathbb{E}[|X|^s]^{1/s}$$

Teorema A.1.34 (Desigualdad de Minkowski) Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $X, Y \in L^p$. Entonces $X + Y \in L^p$ y

$$\mathbb{E}[|X + Y|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p}$$

De todo lo anterior, se deduce que el $(L^p, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado con la norma $\|\cdot\|_p : L^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $\|X\|_p = \sqrt[p]{\mathbb{E}[|X|^p]}$. Además, si $p = 2$, se trata de un espacio de Hilbert cuyo producto escalar es $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$. Si $1 < p < +\infty$, L^p es reflexivo y su dual topológico es L^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Finalmente, la aplicación $d_p : L^p \times L^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $d_p(X, Y) = \|X - Y\|_p$ es consecuentemente una distancia en el espacio L^p .

La esperanza matemática tiene además propiedades interesantes con respecto a funciones convexas.

Teorema A.1.35 (Desigualdad de Jensen) Sea g una función convexa y supongamos que tanto X como $g(X)$ son variables aleatorias integrables. Entonces

$$g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)]$$

Teorema A.1.36 (Desigualdad de Chebyshev) Sea X una variable aleatoria positiva y sea g una función creciente y positiva. Entonces, para cada $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(a)}$$

Esta última desigualdad tiene muchas importantes consecuencias e interpretaciones para diferentes funciones g , algunas de las cuales son:

- Si $X \in L^1$, tomando $g(x) = x$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}$. Este resultado se conoce como desigualdad de Márkov.
- Si $X \in L^p$, tomando $g(x) = x^p$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{a^p}$.
- Si $X \in L^p$, tomando $g(x) = (x - m)^p$, $P(|X - m| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^p]}{a^p}$.

- Si $X \geq 0$ y $X \in L^1$, tomando $g(x) = e^{tx}$, $P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{a^p}$.

Obsérvese que todas estas expresiones dan una cota para la probabilidad de eventos extremos, considerando como tales a los que superan un umbral a o se alejan de la esperanza a .

Teorema A.1.37 Sean X e Y variables aleatorias integrables e independientes. Entonces $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Momentos

El valor de $\mathbb{E}[g(X)]$ recibe para muchos casos un tratamiento especial.

El **momento (ordinario) de orden n** es el valor que se obtiene cuando $g(x) = x^n$. Más concretamente, si $X \in L^n$.

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}[X^n]$$

En particular, si $n = 1$, $\mu_1(X) = \mu(X) = \mu_X$ se denomina **esperanza**.

Al valor $\bar{X}^{1/n} = \sqrt[n]{\mu_n(X)}$ se le denomina informalmente **media n-ésima** de la variable X . Si $n = 1$ la media es la esperanza y si $n = 2$, $\bar{X}^{1/2}$ se denomina **media cuadrática**. Obsérvese que $\|X\|_n^n = \mu_n(|X|) = \bar{X}^n$.

El **momento centrado de orden n** es el valor que se obtiene cuando $g(x) = (x - \mu)^n$:

$$m_n(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^n]$$

En particular, si $n = 1$, $m_1(X) = 0$, si $n = 2$, $m_2(X) = V(X)$ es la **varianza** o **error cuadrático medio**. En este caso $m_n(X) = \|X - \mathbb{E}[X]\|^n$. Análogamente, al valor $d_n(X) = \sqrt[n]{m_n(X)}$ se le denomina **desviación n-ésima típica** de la variable X . Si $n = 2$, $d_2(X) = \sigma(X) = \sigma_X$ se denomina **desviación típica**. Obsérvese que $d_n(X) = d_n(X, \mu)$.

Considérese la función $g(t) = d_k(X, t) = \|X - t\|_k = (\mathbb{E}[|X - t|^k])^{1/k}$. Esta función representa la distancia de la variable aleatoria a un valor determinista t . t es una **medida de la posición** y $g(t)$ es una **medida de la dispersión de orden k** asociada a la medida de posición t . Al valor $D_m^k(X) = g(m)$ asociado a la variable X se le llama **desviación k-ésima media respecto a m** . Si $k = 1$ es la **desviación absoluta media** y si $k = 2$ es la **desviación cuadrática media**.

Teorema A.1.38 (Propiedad característica de la mediana y la media) Sea $X \in L^p$ una variable aleatoria integrable. Sea $g(t) = d_k(X, t)$ con $k \leq p$. Entonces:

- Si $k = 1$, g alcanza un mínimo para $t = \bar{m}$ donde \bar{m} es cualquier mediana de la variable aleatoria y su valor se denomina **desviación absoluta media respecto de la mediana**, $D_{\bar{m}}(X)$.
- Si $k = 2$ (caso Hilbertiano), g alcanza un mínimo para $t = \mu$ donde μ es la media de la variable aleatoria y su valor se denomina **desviación cuadrática media respecto de la media**, $D_{\mu}^2(X)$ que coincide precisamente con la varianza $V(X) = \sigma^2(X)$.

Dada una variable aleatoria X cuya esperanza es $\mu(X) = \mu$ y desviación típica es $\sigma(X) = \sigma$, la variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ se denomina **variable tipificada** ya que para ella $\mu(Z) = 0$ y $\sigma(Z) = 1$ que son los de posición y dispersión en la norma Hilbertiana. Intuitivamente, la variable Z ilustra la variabilidad normalizada de X .

El **momento adimensional de orden n** de la variable X es:

$$\beta_n(X) = \mu_n(Z) = m_n(Z) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^n\right]$$

Se tiene $\beta_1(X) = 0$, $\beta_2(X) = 1$. $\beta_3(X)$ se denomina **coeficiente de simetría** y $\beta_4(X)$ **coeficiente de curtosis** e ilustran respectivamente la simetría y el apuntamiento de la variable.

Las consecuencias de la desigualdad de Chebyshev tienen una interpretación directa en términos de momentos.

- Si $X \in L^p$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mu_n(|X|)}{a^p}$.

- Si $X \in L^p$, $P(|X - m|^p \geq a) \leq \frac{D_m^p(X)}{a^p}$.
- En particular si $\mu = \mu(X)$, $P(|X - \mu| \geq km_p(|X|)) \leq \frac{1}{k^p}$.

Covarianza y correlación

Sean $X, Y \in L^2$, la **covarianza** de X e Y es $\text{COV}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

Teorema A.1.39 (Propiedades de la covarianza) Sean $X, Y \in L^2$.

- $\text{COV}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \langle X - \mathbb{E}[X], Y - \mathbb{E}[Y] \rangle$.
- $\text{COV}(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2\text{COV}(X, Y)$.
- $\text{COV}(X, Y) = \text{COV}(Y, X)$.
- $\text{COV}(X_1 + X_2, Y) = \text{COV}(X_1, Y) + \text{COV}(X_2, Y)$.
- $\text{COV}(X, X) = V(X)$.
- Si X e Y son independientes, entonces $\text{COV}(X, Y) = 0$.

Cuando dos variables verifican $\text{COV}(X, Y) = 0$ se dice que son **independientes**. De las observaciones anteriores se desprende que si dos variables son independientes, son independientes aunque el recíproco no es siempre cierto.

El **coeficiente de correlación** de dos variables aleatorias $X, Y \in L^2$ se define mediante la expresión

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Teorema A.1.40 (Propiedades del coeficiente de correlación) Sean $X, Y \in L^2$.

- Si Z_X y Z_Y son las variables tipificadas a X e Y respectivamente $\rho(X, Y) = \text{COV}(Z_X, Z_Y) = \langle Z_X, Z_Y \rangle$.
- $\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
- Si X e Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.
- $|\rho(X, Y)| \leq 1$. Además, $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vector aleatorio. Si $X_i \in L^1$, $i = 1, \dots, d$. La **esperanza de \mathbf{X}** es el vector $\mu(\mathbf{X}) = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$ y los tensores **momento de orden n** y **momento centrado de orden n** , con $n \leq d$ respectivamente mediante

$$\Lambda_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n X_{i_k}\right], \quad \Omega_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n (X_{i_k} - \mathbb{E}[X_{i_k}])\right]$$

En particular, el tensor momento centrado de orden dos se llama **tensor de varianzas - covarianzas** y se denomina $\text{COV}(\mathbf{X})$. Se representa matricialmente por la **matriz de varianzas - covarianzas** cuyas componentes son $\Sigma_{ij}(\mathbf{X}) = \text{COV}(X_i, X_j)$.

Teorema A.1.41 (Propiedades del tensor momento de orden n) Sean \mathbf{X} un vector aleatorio y sea $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

- Los tensores Λ y Ω son simétricos.
- Si existe $\mu(\mathbf{X})$, $\mu(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mu(\mathbf{X})$.
- Si existe $\Lambda_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{X})$ ($\Omega_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{X})$) y $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, usando la notación de Einstein, $\Lambda_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{Y}) = A_{i_1, j_1} A_{i_2, j_2} \cdots A_{i_n, j_n} \Lambda_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{X})$ ($\Omega_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{Y}) = A_{i_1, j_1} A_{i_2, j_2} \cdots A_{i_n, j_n} \Omega_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{X})$).
- En particular, $\Sigma_{ij}(\mathbf{Y}) = A_{ik} \Sigma_{kl}(\mathbf{X}) A_{lj}$ o en notación matricial $\Sigma(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\Sigma(\mathbf{X})\mathbf{A}^T$.
- Más en particular, $V(\sum_{i=1}^d a_i X_i) = \sum_{i=1}^d a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{COV}(X_i, X_j)$

A.1.4 Función característica y funciones generatrices

Función característica

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad asociado a un experimento aleatorio. Sea X una variable aleatoria. La **función característica** de X es la función $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. Si la variable aleatoria tiene como función de distribución F_X entonces:

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_X$$

Teorema A.1.42 (Propiedades de la función característica de variables aleatorias) Sea X una variable aleatoria.

- ϕ_X siempre existe.
- Si X es una variable aleatoria discreta indexada en un conjunto C , $\phi_X(t) = \sum_{i \in C} e^{itx_i} P(X = x_i)$.
- Si X es una variable aleatoria absolutamente continua, $\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$.
- ϕ_X es uniformemente continua.
- $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$.

Teorema A.1.43 Sean X, Y variables aleatorias independientes con funciones características ϕ_X y ϕ_Y respectivamente. Entonces $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema A.1.44 (Teorema de inversión de Levy) Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X . Entonces, se verifica que cualquiera que sean a y b , puntos de continuidad de F_X

$$P(a < X < b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t) dt$$

Teorema A.1.45 (Teorema de unicidad) Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución F_X y F_Y y funciones características $\phi_X(t)$ y $\phi_Y(t)$ respectivamente. Entonces $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $F_X(x) = F_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema A.1.46 (Teorema de inversión de Fourier) Sean X una variable aleatoria con función característica ϕ_X . Si $\int_{\mathbb{R}} |\phi_X(t)| dt < +\infty$, entonces X es absolutamente continua con densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

$$P(X = x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

Teorema A.1.47 (Momentos y función característica) Sean X una variable aleatoria con función característica ϕ_X y $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $X \in L^k$, entonces existe la derivada k -ésima de ϕ_X y $\mathbb{E}[X^k] = \frac{\phi_X^{(k)}(0)}{ik}$.

Recíprocamente, si existe la derivada k -ésima de ϕ_X en 0, entonces $\mathbb{E}[|X^k|] < +\infty$ ($X \in L^k$).

Teorema A.1.48 Sean X una variable aleatoria con función característica ϕ_X y $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $X \in L^k$, entonces para t en un entorno de 0:

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(it)^j}{j!} \mathbb{E}[X^j] + o(t^k)$$

En particular

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mathbb{E}[X^j]$$

Los resultados anteriores permiten afirmar que si $X \in L^n$ es equivalente conocer todos los momentos de X a conocer la distribución de X .

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vector aleatorio. La **función característica** del vector \mathbf{X} es $\phi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{X}}]$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Si $F_{\mathbf{X}}$ es la función de distribución conjunta de \mathbf{X} entonces

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{x}} dF_{\mathbf{X}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sum_{j=1}^d t_j x_j} dF_{\mathbf{X}}$$

Teorema A.1.49 (Propiedades de la función característica de vectores aleatorios) Sea X un vector aleatorio.

- $\phi_{\mathbf{X}}$ siempre existe.
- Si X es un vector aleatorio discreto indexada en un conjunto C , $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{x} \in C} e^{i\sum_{j=1}^d t_j x_j} P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$.
- Si X es un vector aleatorio absolutamente continuo, $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sum_{j=1}^d t_j x_j} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$.
- $\phi_{\mathbf{X}}$ es uniformemente continua.
- $\phi_{\mathbf{X}}(-\mathbf{t}) = \overline{\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}$, $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.
- La función característica del vector (X_1, \dots, X_r) con $r < d$ en el punto (t_1, \dots, t_r) es $\phi_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0)$.
- Los vectores aleatorios \mathbf{X} e \mathbf{Y} tienen la misma distribución si y sólo si $\phi_{\mathbf{X}} = \phi_{\mathbf{Y}}$.
- X_1, \dots, X_d son independientes si y sólo si $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d \phi_{X_j}(t_j)$.

Función generatriz de momentos

Sea X una variable aleatoria. La **función generatriz de momentos** la variable aleatoria X es la función $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \phi_X(-it)$ siempre que dicho valor exista para todo t en un entorno de 0. Dicho de otro modo:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X$$

Teorema A.1.50 (Propiedades de la función generadora de momentos) Sea X una variable aleatoria.

- Si X es una variable aleatoria discreta indexada en un conjunto C , $M_X(t) = \sum_{x \in C} e^{tx} P(X = x)$.
- Si X es una variable aleatoria absolutamente continua, $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$.

Teorema A.1.51 (Momentos y función generadora de momentos) Sean X una variable aleatoria.

Si existe su función generatriz de momentos, entonces para cada entero $k \geq 1$, $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$ y:

$$\mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0)$$

Como consecuencia, la existencia de la función generatriz de momentos implica la existencia de momentos de todos los órdenes y la distribución de cualquier variable aleatoria cuya función generatriz de momentos exista está determinada unívocamente por sus momentos.

Teorema A.1.52 Sean X e Y variables aleatorias con función generatriz de momentos M_X y M_Y respectivamente. Se verifica:

- Si $M_X(t) = M_Y(t)$ para todo t en un intervalo abierto de \mathbb{R} que contenga a 0, entonces $F_X = F_Y$.
- Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ para t en un entorno de 0.

A.2 Nociones básicas sobre procesos estocásticos

A.2.1 Definiciones básicas

Generalidades

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio probabilístico.

Dado un conjunto infinito T (usualmente tiene el significado de tiempo, por lo que sus puntos se denominan instantes) un **proceso estocástico** con conjunto índice T es una familia de variables aleatorias $(X_t) = \{X_t | t \in T\}$ definidas sobre el mismo espacio probabilístico y que toman valores en un espacio medible (S, \mathcal{A}) . Si el conjunto de índices T es infinito numerable (habitualmente \mathbb{N}) se dice que es un **proceso estocástico en tiempo discreto** y si T es infinito no numerable se dice que es un **proceso estocástico en tiempo continuo**. Si el conjunto S es discreto se dice que el proceso tiene **espacio de estados discreto** mientras que si S es continuo se dice que el proceso **tiene espacio de estados continuo**.

Un proceso estocástico puede ser visto como una aplicación $\chi : T \times \Omega \rightarrow S, (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$. Considerando t fijo, $X_t = \chi(t, \cdot)$ es una variable aleatoria y considerando ω fijo $x(t) = X_t(\omega) = \chi(\cdot, \omega)$ es una función denominada trayectoria asociada a ω .

Si $\{t_1, \dots, t_n\}$ es un subconjunto finito de T , la distribución del vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es una **distribución finito dimensional** del proceso estocástico.

La **función de media** de un proceso estocástico es la función $\mu : T \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$, la **función de varianza** de un proceso estocástico es la función $\sigma^2 : T \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $\sigma^2(t) = \mathbb{V}[X_t]$, la **función de autocovarianza** del proceso es la función $cov : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $cov(t, s) = \text{COV}(X_t, X_s)$ y finalmente la **función coeficiente de autocorrelación** es $\rho : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $\rho(t, s) = \frac{cov(t, s)}{\sigma(t)\sigma(s)}$. La función de autocorrelación ilustra la dependencia lineal del proceso entre los puntos s y t .

Procesos estocásticos estacionarios

Sea (X_t) un proceso estocástico.

Un proceso estocástico es **estacionario en sentido estricto** si $F_{(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})} = F_{(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_r+\tau})}, \forall k \in \mathbb{Z}, t_{i_l} + \tau, t_{i_l}, 1 \leq l \leq r \in T, \tau \in T$. Es decir, cualquier distribución finitodimensional no depende de los instantes considerados, por lo que se puede denotar simplemente mediante $F_{(X_t, r)}$. En particular, la distribución unidimensional F_{X_t} se denomina **distribución subyacente** del proceso y tampoco depende de t por lo que se denota F_X .

Teorema A.2.1 (Propiedades de los procesos estocásticos) Sean X_t un proceso estocástico estacionario. Entonces, si μ, σ^2, cov y ρ son las funciones de media, varianza, covarianza y correlación:

- $\mu(t) = \mu, \sigma^2(t) = \sigma^2$.
- $cov(t, s) = C_X(s - t)$ y $\rho(t, s) = r_X(s - t)$. Es decir, la función de autocovarianzas y de autocorrelaciones sólo depende del retraso o lag $\tau = s - t$.

Un proceso estocástico X_t es **estacionario en sentido amplio** cuando verifica las dos condiciones anteriores. En particular, la estacionariedad en sentido estricto implica la estacionariedad en sentido amplio. El recíproco no es cierto en general, aunque sí que vale para procesos normales.

Para procesos estocásticos, se llama **autocorrelación** a la función $R_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $R_X(\tau) = \mathbb{E}[X_t X_{t+\tau}] = C(\tau) + \mu^2$.

Teorema A.2.2 (Propiedades de la autocorrelación) Sean X_t un proceso estocástico estacionario y R_X su autocorrelación. Entonces:

- $R_X(\tau) = R_X(-\tau), \forall \tau$.
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0) = \mu^2 + \sigma^2 \forall \tau$. Es decir, la función de autocovarianzas y de autocorrelaciones sólo depende del retraso o lag $\tau = s - t$.
- $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \mu^2$.

Se define la **función de densidad espectral** (también llamada en ocasiones **espectro de potencia**) como la transformada de Fourier de la autocorrelación:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Teorema A.2.3 (Propiedades de la densidad espectral) Sean X_t un proceso estocástico estacionario y S_X su función de densidad espectral. Entonces:

- S_X es una función real y $S_X(\omega) \geq 0, \forall \omega$.
- $S_X(-\omega) = S_X(\omega) \forall \omega$.

Procesos estocásticos estacionarios y ergódicos

Sea X_t un proceso estacionario y sea $x(t)$ una trayectoria correspondiente a una realización. El **promedio temporal** se define como:

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

Analogamente, la autocorrelación temporal se define:

$$a_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt$$

Si se considera el conjunto de trayectorias diferentes correspondientes al espacio de sucesos $\omega \in \Omega$, el promedio temporal es una variable aleatoria M_X y la autocorrelación temporal es un proceso estocástico $A_X(\tau)$ indexado por τ .

Teorema A.2.4 Sean X_t un proceso estocástico estacionario y M_X y $A_X(\tau)$ su promedio temporal y autocorrelación temporal. Entonces:

- $\mathbb{E}[M_X] = \mathbb{E}[X_t] = \mu$.
- $\mathbb{E}[A_X(\tau)] = R_X(\tau) \forall \tau$.

En otras palabras, M_X y A_X son estimadores insesgados de μ y R_X

Un proceso estacionario es **ergódico respecto de la media (respectivamente autocorrelación)** si $V(M_X) = 0$ (respectivamente $V(A_X) = 0$), dicho de otro modo, si $M_X = m_X$ ($A_X = R_X(\tau)$) es una variable determinista (una función determinista). Si un proceso estacionario es ergódico para la media y la autocorrelación se dice que es ergódico en el sentido amplio.

Teorema A.2.5 (Condiciones necesarias y suficientes de ergodicidad respecto de la media) Sean X_t un proceso estacionario. Entonces:

- $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) C_X(\tau) d\tau = 0$ si y sólo si X_t es ergódico.
- Si $\int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)| d\tau < \infty$ entonces X_t es ergódico respecto de la media.
- Si $C_X(0) = V(X_t) < \infty$ y $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_X(\tau) = 0$ entonces X_t es ergódico respecto de la media.

Índice de Figuras

1.1.	Representación abstracta de un sistema físico para un ingeniero	10
1.2.	Esquema conceptual del problema al que debe enfrentarse el ingeniero	13
1.3.	Diseño de estructuras ante incertidumbre de fenómenos físicos	17
1.4.	Análisis de estructuras ante incertidumbre de parámetros	18
1.5.	Estructura de soporte de paneles fotovoltaicos empleada	21
1.6.	Métodos disponibles a la hora de realizar simulación CFD	22
1.7.	El modelo LES con respecto a otros modelos de cálculo de turbulencia	23
1.8.	Ejemplo de un caso resuelto mediante el software XFLOW®	23
1.9.	Configuración de placas ensayadas en XFLOW®	24
1.10.	Cortes del campo solución en el plano de la estructura	25
1.11.	Campos solución en el plano horizontal medio de la estructura	26
1.12.	Campos solución sobre las placas fotovoltaicas	27
1.13.	Transformación de la distribución de presiones (resultante de intradós y extradós) a la distribución de fuerzas en los nodos	27
2.1.	Comparación de los datos medidos con el modelo paramétrico	39
2.2.	Comparación de los modelos WB y WBGDP para el ajuste de los datos registrados	40
2.3.	Comparación de los modelos WB y WBGDP para el ajuste de los datos registrados mediante gráficas de probabilidad P-P plot y Q-Q plot	40
2.4.	Datos registrados y modelo WBGDP en un papel probabilístico de tipo Weibull	40
2.5.	Datos registrados que superan el umbral u	42
2.6.	Función de distribución empírica de las excedencias del umbral u comparadas con el modelo <i>Generalizado de Pareto</i> ajustado mediante P.O.T. y el modelo WBGDP	43
2.7.	Diagramas P-P plot y Q-Q plot para las excedencias del umbral u comparadas con el modelo <i>Generalizado de Pareto</i> obtenido mediante P.O.T. y el modelo WBGDP	43
2.8.	Diagrama de Periodos de Retorno para el modelo obtenido y los datos registrados	44
3.1.	Valores de la media y el error estándar para cada una de las series temporales en función del número de datos escogidos	50
3.2.	Medias móviles suavizadas	51
3.3.	Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas	52
3.3.	Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas	53
3.3.	Histograma, diagrama en caja, densidad suavizada y Q-Q plot para las 14 series consideradas	54
3.4.	Coefficientes de asimetría y curtosis para las 14 series	54
3.5.	Algunas densidades conjuntas empíricas entre las 14 series de datos	55
3.6.	Matriz de correlaciones de las 14 series temporales	55
3.7.	Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos $C_i, i = 1, \dots, 14$	56
3.7.	Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos $C_i, i = 1, \dots, 14$	57
3.7.	Funciones de autocorrelación y densidad espectral de los procesos $C_i, i = 1, \dots, 14$	58
3.8.	Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB	61
3.8.	Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB	62

3.8.	Comprobaciones del ajuste en términos de las funciones de densidad y distribución del modelo LWB	63
3.9.	Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB	64
3.9.	Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB	65
3.9.	Comprobaciones del ajuste en términos de los diagramas de probabilidad respecto al modelo LWB	66
3.10.	Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB	67
3.10.	Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB	68
3.10.	Comprobaciones del ajuste en términos los diagramas en caja del modelo LWB	69
3.11.	Estudio mediante <i>bootstrapping</i> de algunos estadísticos frecuenciales	72
3.12.	Estudio mediante <i>bootstrapping</i> de algunos estadísticos basados en los momentos	73
3.13.	Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_1	74
3.14.	Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14}	75
3.15.	Estudio mediante <i>bootstrapping</i> de los coeficientes de correlación entre las variables	76
3.16.	Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14}	76
3.17.	Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_1	77
3.18.	Comparativa de datos originales y simulados para la serie C_{14}	78
3.19.	Valor de los estadísticos para los primeros instantes de tiempo	80
3.20.	Valor de la norma de los estadísticos para los primeros instantes de tiempo	81
3.21.	Valor del error para los primeros instantes de tiempo	82
4.1.	Series temporales de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos	91
4.2.	Comparación de algunos estadísticos para los 4 modelos	93
4.3.	Histograma de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos	95
4.4.	Diagrama en caja de las fuerzas nodales para el grado de libertad 1 y 14 utilizando los 4 modelos	96
4.5.	Coeficientes de correlación de las series 1 - 7	98
4.6.	Coeficientes de correlación de las series 8 - 14	99
4.7.	Coeficientes de correlación cruzados	100
4.8.	Funciones de densidad espectral de las series 1 y 14 utilizando los cuatro modelos	102
4.9.	Detalle de la densidad espectral para los modelos 1, 2 y 4	103
4.10.	Comparación del valor relativo de algunos estadísticos para los 4 modelos propuestos	105
4.11.	Coeficientes de correlación de las series relativos a los obtenidos en el Modelo 1	106
5.1.	Modelo de estructura de barras articuladas para el sistema mecánico considerado	113
5.2.	Cálculo de las sollicitaciones locales	117
6.1.	Ilustración del concepto de ecuación de verificación. $X_1 \sim \mathcal{U}(-0.2, 1.4)$, $X_2 \sim \mathcal{U}(-4.5, 0)$	122
7.1.	Ilustración del compromiso entre costes iniciales y costes de operación	140
7.2.	Frontera eficiente de Markowitz en el contexto de optimización de carteras	143
8.1.	Histogramas de las variables A y B	151
8.2.	Media y percentiles 5 y 95 de la variable Y como función de x	151
8.3.	Histogramas de Y junto a sus medias (valor analítico en rojo y media muestral en verde)	152
9.1.	Esquema del modelo y las variables ambientales	162
9.2.	Valor de la función objetivo para los 36 puntos del catálogo	173
9.3.	Valor de las restricciones para los 36 puntos del catálogo. En rojo los valores que corresponden a puntos no factibles	173
9.4.	Distribuciones del beneficio para los cuatro casos presentados	175
9.5.	Distribuciones del beneficio para los cuatro casos presentados	176
9.6.	Distribuciones del beneficio	177
9.7.	Distribuciones de la energía producida para los cuatro casos presentados	180
9.8.	Distribuciones del número de paradas	181
9.9.	Distribuciones del tiempo entre paradas	182
9.10.	Distribuciones del valor actual neto	183
9.11.	Distribuciones de la tasa interna de rentabilidad	184
9.12.	Distribuciones del periodo de amortización	185

Índice de Tablas

9.1.	Coordenadas de los nodos	162
9.2.	Valores de los parámetros escogidos para el problema	171
9.3.	Valores de las variables de diseño para los diferentes casos analizados	172
9.4.	Análisis frecuencial del beneficio	177
9.5.	Análisis estadístico del beneficio	178
9.6.	Análisis de riesgo de pérdidas	178
9.7.	Análisis del rendimiento en términos contractuales	179
9.8.	Análisis frecuencial de la energía producida	179
9.9.	Análisis estadístico de la energía producida	179
9.10.	Análisis comparativo del rendimiento	179
9.11.	Análisis frecuencial del tiempo entre paradas	181
9.12.	Parámetros estadísticos útiles para la gestión de la planta	181
9.13.	Análisis frecuencial del valor actual neto	183
9.14.	Análisis frecuencial de la tasa interna de rentabilidad diaria	183
9.15.	Análisis frecuencial del periodo de amortización	184
9.16.	Estimación de los valores medios de algunas variables de interés para el estudio de la rentabilidad de la inversión	184
9.17.	Ratio de Sharpe de la inversión para los tres casos considerados	184
9.18.	Análisis comparativo de la inversión	185

Bibliografía

- [1] *European centre for medium-range weather forecasts (ecmwf)*, <http://http://www.ecmwf.int/>, Accessed: 2015-10-27.
- [2] Carlo Acerbi and Dirk Tasche, *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), no. 7, 1487–1503.
- [3] David H Allen, *Introduction to the mechanics of deformable solids: Bars and beams*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] John David Anderson and J Wendt, *Computational fluid dynamics*, vol. 206, Springer, 1995.
- [5] Ted L Anderson and TL Anderson, *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC press, 2005.
- [6] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath, *Coherent measures of risk1*, Risk management: value at risk and beyond (2002), 145.
- [7] Siu-Kui Au and James L. Beck, *Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation*, Probabilistic Engineering Mechanics **16** (2001), no. 4, 263–277.
- [8] Julie A Bannantine, JJ Comer, and JL Handrock, *Fundamentals of metal fatigue analysis. 1990*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. contact **480**, 567.
- [9] M Baxter and A Rennie, *Financial calculus: An introduction to derivative pricing. 1996*.
- [10] Cibeles N Behrens, Hedibert F Lopes, and Dani Gamerman, *Bayesian analysis of extreme events with threshold estimation*, Statistical Modelling **4** (2004), no. 3, 227–244.
- [11] Gal Berkooz, Philip Holmes, and John L Lumley, *The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows*, Annual review of fluid mechanics **25** (1993), no. 1, 539–575.
- [12] Michael J Best, *Portfolio optimization*, CRC Press, 2010.
- [13] Peter J Bickel and David A Freedman, *Some asymptotic theory for the bootstrap*, The Annals of Statistics (1981), 1196–1217.
- [14] John R Birge and Francois Louveaux, *Introduction to stochastic programming*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [15] GJ Bowden, PR Barker, VO Shestopal, and JW Twidell, *The weibull distribution function and wind power statistics*, Wind Engineering **7** (1983), 85–98.
- [16] Carlos Alberto Brebbia and Jose Dominguez, *Boundary elements: an introductory course*, WIT press, 1996.
- [17] Y Cai, B Gouldby, P Hawkes, and P Dunning, *Statistical simulation of flood variables: incorporating short-term sequencing*, Journal of Flood Risk Management **1** (2008), no. 1, 3–12.

- [18] Yuzhi Cai, Ben Gouldby, Paul Dunning, and Peter Hawkes, *A simulation method for flood risk variables*, 2nd Institute of Mathematics and its Applications International Conference on Flood Risk Assessment, 4th September 2007, University of Plymouth, England, 2007.
- [19] Juan Miquel Canet, *Cálculo de estructuras ii. sistemas de piezas prismáticas*, vol. 86, Univ. Politèc. de Catalunya, 2000.
- [20] Manuel Doblaré Castellano and Luis Gracia Villa, *Fundamentos de la elasticidad lineal*, Síntesis, 1998.
- [21] Enrique Castillo and Alfonso Fernández-Canteli, *A unified statistical methodology for modeling fatigue damage*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [22] Enrique Castillo, Ali S Hadi, Narayanaswamy Balakrishnan, and José-Mariá Sarabia, *Extreme value and related models with applications in engineering and science*, Wiley Hoboken, NJ, 2005.
- [23] Francisco Chinesta, Roland Keunings, and Adrien Leygue, *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations: a primer*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [24] Stuart Coles, Joanna Bawa, Lesley Trenner, and Pat Dorazio, *An introduction to statistical modeling of extreme values*, vol. 208, Springer, 2001.
- [25] Nicholas J Cook, “discussion on modern estimation of the parameters of the weibull wind speed distribution for wind speed energy analysis” by *juv seguro, tw lambert*, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **89** (2001), no. 10, 867–869.
- [26] Anthony C Davison and Richard L Smith, *Models for exceedances over high thresholds*, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* (1990), 393–442.
- [27] Beatriz Vaz de Melo Mendes and Hedibert Freitas Lopes, *Data driven estimates for mixtures*, *Computational statistics & data analysis* **47** (2004), no. 3, 583–598.
- [28] P de Zea Bermudez and Samuel Kotz, *Parameter estimation of the generalized pareto distribution—part i*, *Journal of Statistical Planning and Inference* **140** (2010), no. 6, 1353–1373.
- [29] ———, *Parameter estimation of the generalized pareto distribution—part ii*, *Journal of Statistical Planning and Inference* **140** (2010), no. 6, 1374–1388.
- [30] Ente Público Puertos del Estado, *Recomendaciones para obras marítimas: Rom 0.0: procedimiento general y bases de cálculo en el proyecto de obras marítimas y portuarias*, Puertos del Estado, 2001.
- [31] Philippe Drobinski, Corentin Coulais, and Bénédicte Jourdier, *Surface wind-speed statistics modelling: Alternatives to the weibull distribution and performance evaluation*, *Boundary-Layer Meteorology* (2015), 1–27.
- [32] DJ Dupuis, *Exceedances over high thresholds: A guide to threshold selection*, *Extremes* **1** (1999), no. 3, 251–261.
- [33] Bradley Efron, *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, *The annals of Statistics* (1979), 1–26.
- [34] ———, *Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable*, *Siam Review* **21** (1979), no. 4, 460–480.
- [35] Bradley Efron and B Efron, *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, vol. 38, SIAM, 1982.
- [36] Willliam Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, John Wiley & Sons, 2008.
- [37] Christopher AT Ferro and Johan Segers, *Inference for clusters of extreme values*, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* **65** (2003), no. 2, 545–556.
- [38] Ministerio de Fomento, *Instrucción de hormigón estructural*, Fomento, Madrid, España (2008).
- [39] ———, *Código técnico de la edificación*, Fomento, Madrid, España (2009).

- [40] ———, *Instrucción de acero estructural*, Fomento, Madrid, España (2012).
- [41] Rodney O Fox and Herbert L. Stiles, *Computational models for turbulent reacting flows*, vol. 419, Cambridge university press Cambridge, 2003.
- [42] Wayne A Fuller, *Introduction to statistical time series*, vol. 428, John Wiley & Sons, 2009.
- [43] Eva M Furrer and Richard W Katz, *Improving the simulation of extreme precipitation events by stochastic weather generators*, *Water Resources Research* **44** (2008), no. 12.
- [44] Crispin W Gardiner et al., *Handbook of stochastic methods*, vol. 4, Springer Berlin, 1985.
- [45] Andrew Gelman, John B Carlin, Hal S Stern, and Donald B Rubin, *Bayesian data analysis*, vol. 2, Taylor & Francis, 2014.
- [46] Y Goda, *Random seas and design of marine structures. advanced series on ocean engineering*, vol. 15, 2000.
- [47] Sven-Erik Gryning, Ekaterina Batchvarova, Rogier Floors, Alfredo Peña, Burghard Brümmer, Andrea N Hahmann, and Torben Mikkelsen, *Long-term profiles of wind and weibull distribution parameters up to 600 m in a rural coastal and an inland suburban area*, *Boundary-layer meteorology* **150** (2014), no. 2, 167–184.
- [48] James Douglas Hamilton, *Time series analysis*, vol. 2, Princeton university press Princeton, 1994.
- [49] Joseph P Hennessey Jr, *A comparison of the weibull and rayleigh distributions for estimating wind power potential*, *Wind Engineering* **2** (1978), 156–164.
- [50] RV Hogg, JW McKean, and AT Craig, *Introduction to mathematical statistics*. 2005.
- [51] Leo H Holthuijsen, *Waves in oceanic and coastal waters*, Cambridge University Press, 2007.
- [52] Gerhard A Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics*, vol. 24, Wiley Chichester, 2000.
- [53] Yesheatesfa Hundecha, Markus Pahlow, and Andreas Schumann, *Modeling of daily precipitation at multiple locations using a mixture of distributions to characterize the extremes*, *Water resources research* **45** (2009), no. 12.
- [54] Ian Jolliffe, *Principal component analysis*, Wiley Online Library, 2002.
- [55] CG Justus, WR Hargraves, and Ali Yalcin, *Nationwide assessment of potential output from wind-powered generators*, *Journal of applied meteorology* **15** (1976), no. 7, 673–678.
- [56] Ioannis Karatzas and Steven Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, vol. 113, Springer Science & Business Media, 2012.
- [57] Richard W Katz, Marc B Parlange, and Philippe Naveau, *Statistics of extremes in hydrology*, *Advances in water resources* **25** (2002), no. 8, 1287–1304.
- [58] Tamara G Kolda and Brett W Bader, *Tensor decompositions and applications*, *SIAM review* **51** (2009), no. 3, 455–500.
- [59] Nathabandu T Kottegoda and Renzo Rosso, *Applied statistics for civil and environmental engineers*, Blackwell Malden, MA, 2008.
- [60] YC Liang, HP Lee, SP Lim, WZ Lin, KH Lee, and CG Wu, *Proper orthogonal decomposition and its applications—part i: Theory*, *Journal of Sound and vibration* **252** (2002), no. 3, 527–544.
- [61] YC Liang, WZ Lin, HP Lee, SP Lim, KH Lee, and H Sun, *Proper orthogonal decomposition and its applications—part ii: Model reduction for mems dynamical analysis*, *Journal of Sound and Vibration* **256** (2002), no. 3, 515–532.
- [62] Helmut Lütkepohl, *New introduction to multiple time series analysis*, Springer Science & Business Media, 2005.

- [63] Sankaran Mahadevan and A Haldar, *Probability, reliability and statistical method in engineering design*, 2000.
- [64] Franck Mazas and Luc Hamm, *A multi-distribution approach to pot methods for determining extreme wave heights*, *Coastal Engineering* **58** (2011), no. 5, 385–394.
- [65] Fernando J Méndez, Melisa Menéndez, Alberto Luceño, and Inigo J Losada, *Estimation of the long-term variability of extreme significant wave height using a time-dependent peak over threshold (pot) model*, *Journal of Geophysical Research: Oceans* (1978–2012) **111** (2006), no. C7.
- [66] Andrew Ronald Mitchell and David Francis Griffiths, *The finite difference method in partial differential equations*, John Wiley, 1980.
- [67] David Edward Newland, *An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis*, Courier Corporation, 2012.
- [68] Joachim Ohser and Frank Mücklich, *Statistical analysis of microstructures in materials science*, Wiley, 2000.
- [69] Athanasios Papoulis and S Unnikrishna Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*, Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [70] Penélope Ramírez and José Antonio Carta, *Influence of the data sampling interval in the estimation of the parameters of the weibull wind speed probability density distribution: a case study*, *Energy Conversion and Management* **46** (2005), no. 15, 2419–2438.
- [71] Junuthula Narasimha Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [72] Antonio Barrero Ripoll and Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, McGraw-Hill Interamericana de España, 2005.
- [73] R Tyrrell Rockafellar, *Coherent approaches to risk in optimization under uncertainty*, *Tutorials in operations research* **3** (2007), 38–61.
- [74] Gianfausto Salvadori, Carlo De Michele, Nathabandu T Kottegoda, and Renzo Rosso, *Extremes in nature: an approach using copulas*, vol. 56, Springer Science & Business Media, 2007.
- [75] Sergey Sarykalin, Gaia Serraino, and Stan Uryasev, *Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization*, *Tutorials in Operations Research. INFORMS*, Hanover, MD (2008), 270–294.
- [76] Leopold Schmetterer, *Introduction to mathematical statistics*, vol. 202, Springer Science & Business Media, 2012.
- [77] JV Seguro and TW Lambert, *Modern estimation of the parameters of the weibull wind speed distribution for wind energy analysis*, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **85** (2000), no. 1, 75–84.
- [78] Alexander Shapiro, Darinka Dentsheva, et al., *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*, vol. 16, SIAM, 2014.
- [79] Uri Shmueli and George Herbert Weiss, *Introduction to crystallographic statistics*, vol. 6, Oxford University Press, 1995.
- [80] Emil Simiu and Robert H Scanlan, *Wind effects on structures*, Wiley, 1996.
- [81] James A Smith, *Estimating the upper tail of flood frequency distributions*, *Water Resour. Res* **23** (1987), no. 8, 1657–1666.
- [82] S Solari and MA Losada, *A unified statistical model for hydrological variables including the selection of threshold for the peak over threshold method*, *Water Resources Research* **48** (2012), no. 10.
- [83] Sebastián Solari and Miguel Ángel Losada, *Unified distribution models for met-ocean variables: Application to series of significant wave height*, *Coastal Engineering* **68** (2012), 67–77.

-
- [84] Sauro Succi, *The lattice boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*, Oxford university press, 2001.
- [85] Andrea Tancredi, Clive Anderson, and Anthony O'Hagan, *Accounting for threshold uncertainty in extreme value estimation*, *Extremes* **9** (2006), no. 2, 87–106.
- [86] John Michael Tutill Thompson and Giles W Hunt, *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons, 1973.
- [87] Paul Thompson, Yuzhi Cai, Dominic Reeve, and Julian Stander, *Automated threshold selection methods for extreme wave analysis*, *Coastal Engineering* **56** (2009), no. 10, 1013–1021.
- [88] Stephen P Timoshenko, James M Gere, and W Prager, *Theory of elastic stability*, *Journal of Applied Mechanics* **29** (1962), 220.
- [89] Stanton E Tuller and Arthur C Brett, *The characteristics of wind velocity that favor the fitting of a weibull distribution in wind speed analysis*, *Journal of Climate and Applied Meteorology* **23** (1984), no. 1, 124–134.
- [90] Sakari M Uppala, PW Kållberg, AJ Simmons, U Andrae, V Bechtold, M Fiorino, JK Gibson, J Haseler, A Hernandez, GA Kelly, et al., *The era-40 re-analysis*, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **131** (2005), no. 612, 2961–3012.
- [91] Henk Kaarle Versteeg and Weeratunge Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, Pearson Education, 2007.
- [92] David Vose, *Risk analysis: a quantitative guide*, John Wiley & Sons, 2008.
- [93] M Vrac and P Naveau, *Stochastic downscaling of precipitation: From dry events to heavy rainfalls*, *Water resources research* **43** (2007), no. 7.
- [94] Thomas Tomkins Warner, *Numerical weather and climate prediction*, Cambridge University Press, 2010.
- [95] JJ Xiong and RA Sheno, *Fatigue and fracture reliability engineering*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [96] Olek C Zienkiewicz and Robert L Taylor, *The finite element method for solid and structural mechanics*, Butterworth-heinemann, 2005.

